COMENTÁRIO DA PROVA DE MATEMÁTICA

A prova manteve a característica dos anos anteriores quanto à boa qualidade, contextualização e originalidade nos enunciados.

- **Boa abrangência:**

01) Funções (relação entre variáveis)

02) Geometria Plana (áreas e semelhanças entre figuras)

03) Funções Exponenciais e Logaritmos (equações e logaritmos decimais)

04) Geometria Plana, PG e Exponenciais

05) Geometria Espacial e Funções (área, volume, máximos/mínimos)

06) Geometria Analítica (reta, circunferência, área de triângulo)

07) Matrizes, Determinantes e Trigonometria (Sarrus, equação trigonométrica)

08) Análise Combinatória e Probabilidades (PFC)

09) Sistemas Lineares, Funções (solução de SL, função quadrática e analítica)

10) Geometria dos Sólidos e Funções (volume, semelhança e expressão algébrica)

Assuntos não relacionados:

Números complexos

Polinômios

Equações Algébricas

Binômio de Newton

Progressão aritmética

- **Boa interação entre conteúdos**

Questões 03, 04, 05, 07, 08, 09 e 10 envolveram mais de um assunto.

- **Grau de dificuldade**

Uma prova de bom nível, dentro da expectativa de uma prova específica.

Parabéns à comissão.

Professores de Matemática do Curso Positivo.

01 - Sabe-se que a velocidade do som no ar depende da temperatura. Uma equação que relaciona essa velocidade v (em metros por segundo) com a temperatura t (em graus Celsius) de maneira aproximada é $v = 20\sqrt{t+273}$. Com base nessas informações, responda às seguintes perguntas:

a) Qual é a velocidade do som à temperatura de 27 °C? (Sugestão: use $\sqrt{3} = 1{,}73$)

Comentário:

A equação da velocidade é dada por:

$v = 20\sqrt{t+273}$

À temperatura de 27° C, a velocidade é dada por:

$v = 20\sqrt{27+273}$

$v = 20\sqrt{300} = 20\sqrt{3\,.\,10^2} = 200\sqrt{3} = 200\,.\,1{,}73$

v = 346 m/s

Logo, à temperatura de 27° C, a velocidade é igual a 346 m/s.

b) Costuma-se assumir que a velocidade do som é de 340 m/s (metros por segundo). Isso ocorre a que temperatura?

Comentário:

A temperatura t, à velocidade do som, é dada por:

$340 = 20\sqrt{t+273}$

$17 = \sqrt{t+273}$

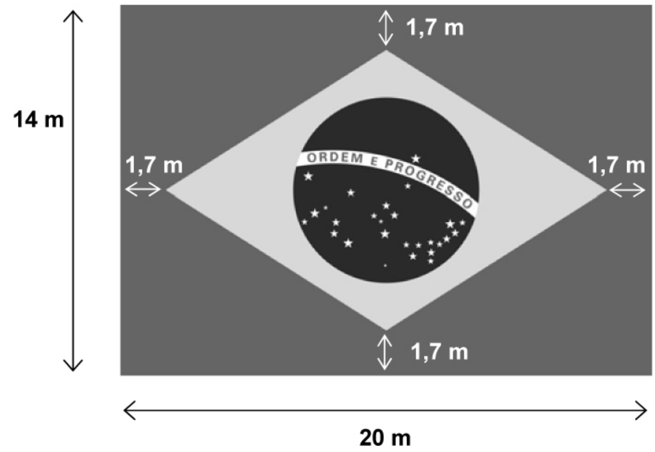
$17^2 = (\sqrt{t+273})^2$

$289 = t + 273$

$t = 16^{o}C$

Portanto, a temperatura é igual a 16° C.

02 - A bandeira do Brasil, hasteada na Praça dos Três Poderes, em Brasília, é uma das maiores bandeiras hasteadas do mundo. A figura abaixo indica as suas medidas de acordo com as normas oficiais.

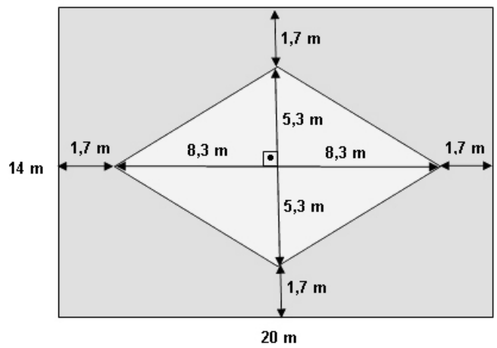


a) Sabendo-se que o raio do círculo azul da bandeira da Praça dos Três Poderes mede 3,5 m, quanto mede a área da região amarela visível dessa bandeira? Sugestão: use $\pi = \mathbf{3,14}$.

Comentário:

Solução:

Pela simetria que se supõe existir na bandeira, a região amarela e o círculo azul da Praça dos Três Poderes, juntos, constituem um losango cujas diagonais maior (D) e menor (d) medem, respectivamente 16,6 m e 10,6 m.



A área de um losango é igual ao semiproduto das medidas das diagonais, ou seja:

$$S_{Losango} = \frac{D.d}{2}$$

$$S_{Losango} = \frac{16,6.10,6}{2} = 87,98 \text{ m}^2$$

A medida da área do círculo azul é dada por:

$$S_{Círculo} = \pi R^2$$

$$S_{Círculo} = 3,14 \,.\, (3,5)^2 = 38,465 \text{ m}^2$$

A área amarela visível da bandeira é dada por:

$$S_{amarela} = S_{Losango} - S_{Círculo}$$

$$S_{amarela} = 87,98 - 38,465$$

$$S_{amarela} = 49,515 \text{ m}^2$$

Portanto, a área da região amarela visível dessa bandeira mede aproximadamente 49,515 m^2.

b) Deseja-se construir uma bandeira do Brasil com o lado maior do retângulo medindo 2 m e nas mesmas proporções da bandeira da Praça dos Três Poderes. Qual será a medida da região amarela visível dessa outra bandeira?

Comentário:

Sendo S_1 e S_2 as áreas amarelas visíveis das bandeiras cujos lados maiores dos retângulos são iguais a 20 m e 2 m, respectivamente, pela razão de semelhança entre as medidas correspondentes, temos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{20}{2}\right)^2$$

$$\frac{49{,}515}{S_2} = (10)^2$$

$$\mathbf{S_2 = \frac{49{,}515}{100} = 0{,}49515\ m^2}$$

Desta forma, a medida da região amarela visível dessa outra bandeira será igual a 0,49515 m^2.

Observação:

Mesmo que a bandeira nacional seja extremamente conhecida, seria oportuno que o enunciado esclarecesse que as distâncias iguais a 1,7 m, indicadas na figura, correspondem às medidas existentes entre os pontos médios dos lados do retângulo e os vértices do quadrilátero que limita a região amarela, pois a área da região amarela pode variar de acordo com as posições dos pontos destacados em cada lado do retângulo.

03 - Suponha que o tempo t (em minutos) necessário para ferver água em um forno de micro-ondas seja dado pela função

$$t(n) = a \cdot n^b$$

sendo a e b constantes e n o número de copos de água que se deseja aquecer.

Número de copos	Tempo de aquecimento
1	1 minuto e 30 segundos
2	2 minutos

a) Com base nos dados da tabela ao lado, determine os valores de **a** e **b**.
Sugestão: use $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,45$.

Comentário:

a) Para n = 1, verifica-se que t = 1,5 minuto, logo:

$t(n) = a \,.\, n^b$

$t(1) = a \,.\, 1^b$

$1,5 = a \,.\, 1$

$a = 1,5$

Para n = 2 verifica-se que t = 2 minutos:

$t(n) = 1,5 \,.\, n^b$

$t(2) = 1,5 \,.\, 2^b$

$2 = \frac{3}{2} \,.\, 2^b$

$\frac{2^2}{3} = 2^b$

$\log\left(\frac{2^2}{3}\right) = \log 2^b$

$\log 2^2 - \log 3 = b \,.\, \log 2$

$2 \,.\, \log 2 - \log 3 = b \,.\, \log 2$

$2 \,.\, 0,30 - 0,45 = b \,.\, (0,30)$

$0,15 = 0,30b$

$b = 0,5$

Portanto, a = 1,5 e b = 0,5.

b) Qual é o tempo necessário para se ferverem 4 copos de água nesse forno de micro-ondas?

Para n = 4, temos:

$t(n) = 1,5 \,.\, n^{0,5}$

$t(4) = 1,5 \,.\, 4^{0,5}$

$t(4) = 1,5 \,.\, (2^2)^{0,5}$

$t(4) = 1,5 \,.\, 2^1$

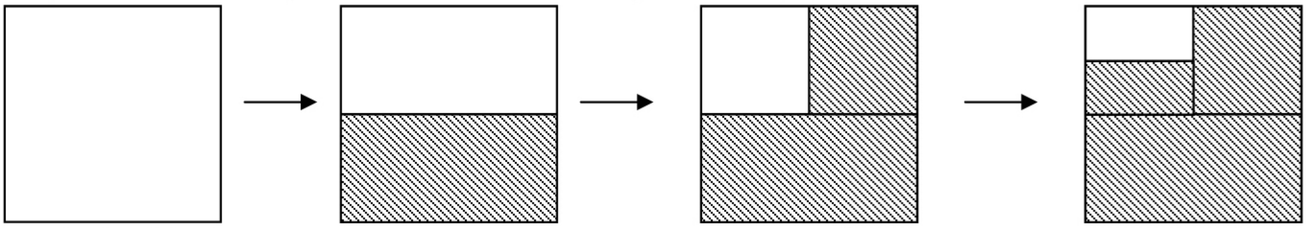
$t(4) = 3$

Assim, 3 minutos é o tempo necessário para se ferverem 4 copos de água nesse forno de micro-ondas.

Observação:

É bastante incomum atribuir-se para log 3 o valor 0,45. Com 11 casas decimais de aproximação, o valor de log 3 é 0,47712125472. Existe, portanto, uma significativa diferença entre os valores.

04 - Um quadrado está sendo preenchido como mostra a sequência de figuras abaixo:



quadrado original **passo 1** **passo 2** **passo 3**

No passo 1, metade do quadrado original é preenchido. No passo 2, metade da área não coberta no passo anterior é preenchida. No passo 3, metade da área não coberta nos passos anteriores é preenchida, e assim por diante.

a) No passo 4, que percentual do quadrado original estará preenchido?

Comentário:

a) A medida da área não preenchida em cada passo segue uma progressão geométrica cuja razão é igual a 1/2, de modo que:

Passo 1: $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$ da área do quadrado não é preenchida;

Passo 2: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$ da área do quadrado não é preenchida;

Passo 3: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125$ da área do quadrado não é preenchida;

Passo 4: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$ da área do quadrado não é preenchida.

Logo, após o passo 4, temos:

$1 - 0{,}0625 = 0{,}9375$ ou 93,75%

Logo, 93,75% do quadrado original estarão preenchidos.

b) Qual é o número mínimo de passos necessários para que 99,9% do quadrado original seja preenchido?

Comentário:

Sendo **x** a ordem mínima do passo, para o qual 99,9% do quadrado original estejam preenchidos, temos:

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0{,}999$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0{,}999 - 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 0{,}001$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{1000}$$

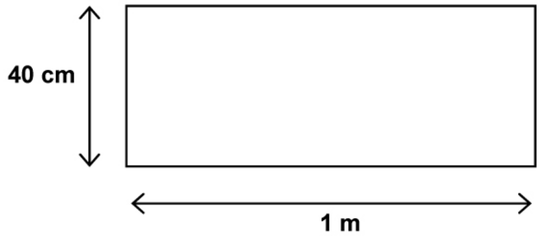
Atribuindo valores para x, temos

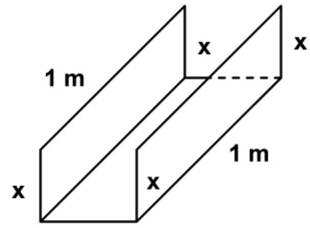
$x = 9 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512} \leq \frac{1}{1000}$ (não satisfaz)

$x = 10 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \leq \frac{1}{1000}$ (verifica)

Assim, 10 é o número mínimo de passos necessários para que 99,9% do quadrado original sejam preenchidos.

05 - **Uma calha será construída a partir de folhas metálicas em formato retangular, cada uma medindo 1 m por 40 cm. Fazendo-se duas dobras de largura x, paralelas ao lado maior de uma dessas folhas, obtém-se três faces de um bloco retangular, como mostra a figura da direita.**





a) Obtenha uma expressão para o volume desse bloco retangular em termos de x.

Comentário:

Com as dobras, a base do bloco retangular (prisma) é um retângulo cujas dimensões são (40 – 2x) cm e 100 cm. A altura do bloco é igual a x cm. Logo, o volume, em cm^3, é dado por:

V = (área da base) . (altura)

$V = (40 - 2x) \cdot 100 \cdot x$

$V(x) = -200x^2 + 4000x$

Assim, o volume, em cm^3, é igual $-200x^2 + 4000x$.

b) Para qual valor de x o volume desse bloco retangular será máximo?

Comentário:

O valor de **x** para o qual o volume é máximo corresponde à abscissa do vértice da parábola que representa o gráfico do volume em função de x:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

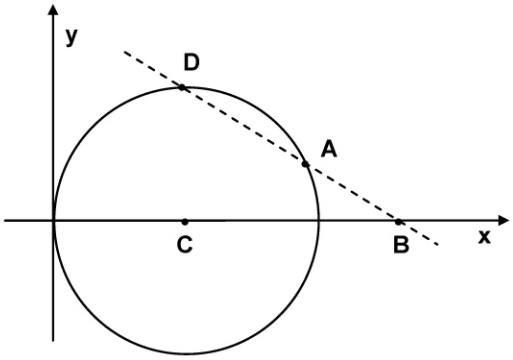
$$x_v = -\frac{4000}{2 \cdot (-200)} = 10$$

Portanto, o volume desse bloco retangular será máximo para x = 10 cm.

Observação:

Não é usual o cálculo do volume de um bloco retangular que não se encontre inteiramente constituído.

06 - A figura abaixo mostra uma circunferência tangente ao eixo y, com centro C sobre o eixo x e diâmetro de 10 unidades.



a) Sabendo que A = (8,4) e que r : 3y + x = 20 é a reta que passa por A e B, calcule a área do triângulo CAB.

Comentário:

a) O ponto B é o ponto em que r intersecta o eixo x, logo, a abscissa de B é dada por:

$3y + x = 20$

$3 \,.\, 0 + x = 20$

$x = 20$

Desta forma, B = (20,0). Se a circunferência tangencia o eixo y na origem e tem diâmetro 10, o centro tem coordenadas C = (5,0). Se a base do triângulo ABC for o segmento $\overline{BC}$ (BC = 15), a altura correspondente terá como medida a ordenada do ponto A. Logo, a área do triângulo ABC será dada por:

$$S_{ABC} = \frac{(\text{base}).(\text{altura})}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{(15).(4)}{2} = 30 \text{ unidades de área}$$

b) Encontre as coordenadas do ponto D, indicado na figura acima, no qual a reta r intercepta a circunferência.

Comentário:

b) A equação reduzida da circunferência de centro C = (5,0) e raio 5 é:

$(x - 5)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$

Na equação da reta, isolando-se a variável x, temos:

$3y + x = 20 \rightarrow x = 20 - 3y$

Substituindo da equação da circunferência, temos:

$(\mathbf{x} - 5)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$

$(\mathbf{20 - 3y} - 5)^2 + y^2 = 25$

$(15 - 3y)^2 + y^2 = 25$

$225 - 90y + 9y^2 + y^2 = 25$

$10y^2 - 90y + 200 = 0$

$y^2 - 9y + 20 = 0$

Resolvendo a equação quadrática, obtemos y = 4 ou y = 5, então, substituindo em x = 20 – 3y, temos:

$y = 4 \rightarrow x = 20 - 3 \,.\, 4 = 8 \rightarrow A = (8, 4)$

$y = 5 \rightarrow x = 20 - 3 \,.\, 5 = 5 \rightarrow D = (5, 5)$

Portanto, D = (5, 5).

07 - Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(2x) & \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcule $f(0)$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Comentário:

a) A função **f** é definida pelo determinante da matriz destacada. Resolvendo o determinante, temos:

$f(x) = \cos(2x) - 2.\operatorname{sen}(x).\cos(x)$

$f(x) = \cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)$

Então:

$f(0) = \cos(2 \,.\, 0) - \operatorname{sen}(2 \,.\, 0) = \cos(0) - \operatorname{sen}(0) = 1 - 0 = 1$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \,.\, \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(2 \,.\, \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1$$

b) Para quais valores de x se tem f(x) = 0?

Comentário:

$f(x) = 0$

$\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x) = 0$

$\cos(2x) = \operatorname{sen}(2x)$

$$\frac{\operatorname{sen}\,(2x)}{\cos\,(2x)} = 1$$

$\operatorname{tg}\,(2x) = 1$

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ (k \in Z)$$

Assim, o conjunto solução da equação f(x) = 0 é dado por:

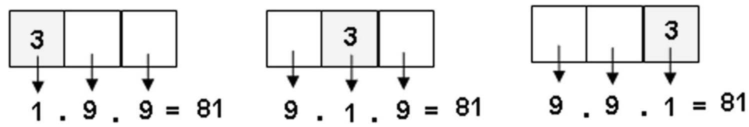
$$S = \left\{x \in IR \,/\, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right\},\ k \in Z$$

08 - Um cadeado com segredo possui três engrenagens, cada uma contendo todos os dígitos de 0 a 9. Para abrir esse cadeado, os dígitos do segredo devem ser colocados numa sequência correta, escolhendo-se um dígito em cada engrenagem. (Exemplos: 237, 366, 593...)

a) Quantas possibilidades diferentes existem para a escolha do segredo, sabendo que o dígito 3 deve aparecer obrigatoriamente e uma única vez?

Comentário:

O algarismo 3 deve aparecer uma única vez, podendo ser na ordem das centenas, das dezenas ou das unidades:



Logo, o número de possibilidades para a escolha do segredo é igual a:

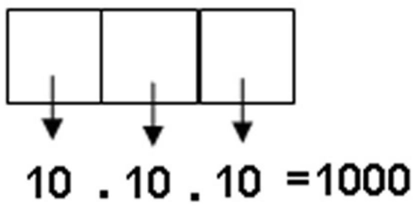
$81 + 81 + 81 = 81 . 3 = 243$

Existem 243 maneiras possíveis para a escolha do segredo, se o algarismo 3 aparecer uma única vez.

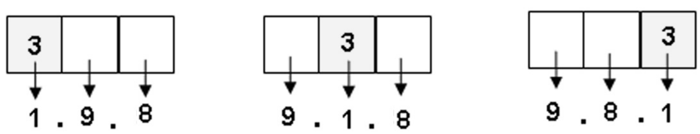
b) Qual é a probabilidade de se escolher um segredo no qual todos os dígitos são distintos e o dígito 3 aparece obrigatoriamente?

Comentário:

b) A quantidade total de segredos (espaço amostral) é dada por:



- A quantidade de segredos cujos algarismos sejam distintos e o algarismo 3 apareça (número de situações favoráveis) é dada por:



- Logo, o número de possibilidades para a escolha do segredo é igual a:

  $72 + 72 + 72 = 216$

  Portanto, a probabilidade **p** é

  $p = \dfrac{216}{1000} = 0,216$ ou $p = 21,6\%$

09 - Uma parábola é o gráfico de uma função da forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

a) Encontre a função cujo gráfico é a parábola que contém os pontos P = (–1,2), Q = (1,2) e R = (2,5). Sugestão: utilize os pontos dados para construir um sistema linear.

Comentário:

a) Utilizando as coordenadas dos pontos P, Q e R, temos:

$2 = a \,.\, (-1)^2 + b \,.\, (-1) + c \rightarrow a - b + c = 2$ (I)

$2 = a \,.\, (1)^2 + b \,.\, (1) + c \rightarrow a + b + c = 2$ (II)

$5 = a \,.\, (2)^2 + b \,.\, (2) + c \rightarrow 4a + 2b + c = 5$ (III)

Fazendo (II) – (I), temos:

$2b = 0 \rightarrow b = 0$

Fazendo (III) – (I), temos:

$3a + 3b = 3 \rightarrow 3a + 3.0 = 3 \rightarrow a = 1$

Substituindo a = 1 e b = 0 em (I), temos:

$1 - 0 + c = 2 \rightarrow c = 1$

Logo, a função cujo gráfico contém os pontos P, Q e R tem a forma $y = x^2 + 1$.

b) Existe uma parábola que contém os pontos P = (–1, –1), Q = (1,3) e R = (2,5)? Justifique.

Comentário:

P (–1, –1) $\Rightarrow x = -1$ e $y = -1 \therefore a(-1)^2 + b(-1) + c = -1$

Q (1, 3) $\Rightarrow x = 1$ e $y = 3 \therefore a(1)^2 + b(1) + c = 3$

R (2, 5) $\Rightarrow x = 2$ e $y = 5 \therefore a(2)^2 + b(2) + c = 5$

$$\begin{cases} a - b + c = -1 & \text{(I)} \\ a + b + c = 3 & \text{(II)} \\ 4a + 2b + c = 5 & \text{(III)} \end{cases}$$

Fazendo (II) – (I), temos

$2b = 4 \therefore b = 2$

Fazendo (III) – (II), temos

$3a + b = 2$

substituindo b = 2, vem

$3a = 0 \therefore a = 0$

substituindo a = 0, b = 2 em (I), tem-se

$0 - 2 + c = -1 \therefore c = 1$

Portanto f(x) = 2x + 1 que é a equação de uma reta.

Resposta: Não existe a parábola passando pelos pontos dados pois esses pontos pertencem a uma reta, ou seja, estão alinhados.

Outra maneira:

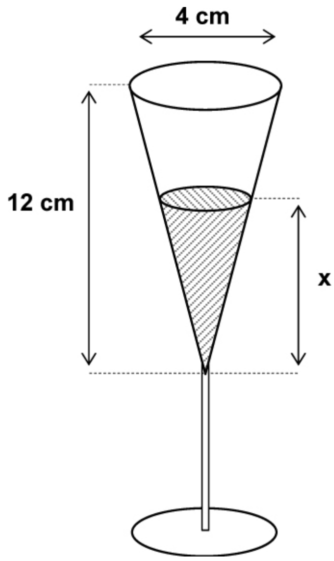
Observe que os pontos P, Q e R estão alinhados uma vez que:

$$\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{-1-3}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\frac{y_Q - y_R}{x_Q - x_R} = \frac{3-5}{1-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Assim, não existe parábola que passe simultaneamente por P, Q e R.

10 - A parte superior de uma taça tem o formato de um cone, com as dimensões indicadas na figura.



a) Qual o volume de líquido que essa taça comporta quando está completamente cheia?

Comentário:

A parte superior da taça corresponde a um cone reto cujo raio da base é igual a 2 cm e cuja altura é igual a 12 cm. Logo, o volume é dado por:

$$v_{taça} = \frac{1}{3} \cdot (\text{base}) \cdot (\text{altura})$$

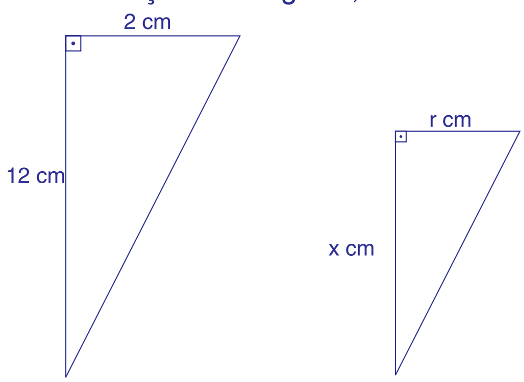
$$v_{taça} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 12$$

$$v_{taça} = 16\pi \text{ cm}^3$$

b) Obtenha uma expressão para o volume V de líquido nessa taça, em função da altura x indicada na figura.

Comentário:

Pela semelhança de triângulos, conforme a figura



em que **r** é o raio da base do cone que representa o líquido da taça

$$\frac{x}{12} = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{x}{6}$$

Assim, o volume V de líquido da taça, em função da altura **x**, em cm, é dado por:

$$v_{líquido} = \frac{1}{3} \cdot (\text{base}) \cdot (\text{altura})$$

$$v_{líquido} = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{x}{6}\right)^2 \cdot x$$

$$v_{líquido} = \frac{x^3}{108} \pi \text{ cm}^3, \ 0 \leq x \leq 12$$

Obs.: também seria possível resolver o item **b** pela relação direta $\frac{v_T}{v_P} = \frac{H^3}{h^3}$