

COMENTÁRIO DA PROVA DE MATEMÁTICA

Professores Adilson Longen, Carlos Walter Kolb, Emerson Marcos Furtado e Oslei Domingos

Utilizamos a seguir alguns critérios para comentar a prova de Matemática da 2ª fase da UFPR.

1. Abrangência

- Bom
 Regular
 Ruim

Assuntos tradicionalmente do Ensino Médio que poderiam ser abordados foram substituídos por temas de Ensino Fundamental

2. Pertinência

- Bom
 Regular
 Ruim

Assunto “inequação do 1º grau” não tem o *status* para ser transformado em parte de uma questão. Assunto “proporção”, embora de importância grande para a Matemática, já tinha sido abordado na 1ª fase.

3. Contextualização

- Bom
 Regular
 Ruim

Os contextos não podem ser confundidos com pretextos. A questão da impressão de páginas coloridas e em preto e branco, por exemplo, é resolvida supondo que não se imprima ao mesmo tempo colorido e preto e branco. Na questão de trigonometria perdeu-se a oportunidade de utilizar-se um fenômeno periódico para contextualizá-la adequadamente.

4. Gradação

- Bom
 Regular
 Ruim

As questões não foram adequadamente distribuídas em níveis (fácil, médio, difícil). Isso compromete a seleção dos alunos.

5. Correção

- Bom
 Regular
 Ruim

A questão sobre Geometria Analítica foi elaborada como erro conceitual: círculo e circunferência não possuem equações iguais.

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2016/2017 2ª Fase

01 - Encontre o conjunto solução em \mathbb{R} das seguintes inequações:

a) $5 - x \leq x + 2.$

Resolução:

$$5 - x \leq x + 2.$$

$$5 - 2 \leq x + x$$

$$3 \leq 2x$$

$$x \geq \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{3}{2} \right\}$$

b) $|3x + 1| < 3.$

Resolução:

$$-3 < 3x + 1 < 3$$

$$-3 - 1 < 3x < 3 - 1$$

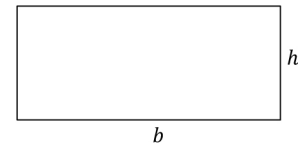
$$-4 < 3x < 2$$

$$-\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / -\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3} \right\}$$

02 - Na modelagem matemática de um processo de fabricação, é comum supor que não há perda de material com emendas, sobreposição de partes etc.

Deseja-se construir um reservatório cilíndrico com diâmetro de 120 cm e capacidade de $1,5 \text{ m}^3$. Neste problema, estamos nos referindo a um cilindro circular reto perfeito. Para fazer a lateral desse cilindro, será usada uma chapa metálica retangular de comprimento b e altura h . Use $\pi = 3,14$ e dê suas respostas com duas casas decimais.



a) Calcule o comprimento b que a chapa deve ter.

Resolução:

O comprimento b deve ser igual ao perímetro da base do cilindro cujo diâmetro mede 120 cm:

$$2\pi \cdot 60 = b$$

$$b \cong 2 \cdot 3,14 \cdot 60$$

$$b \cong 376,80 \text{ cm}$$

b) Calcule a altura h que a chapa deve ter.

Resolução:

O volume do cilindro deve ser igual a $1,5 \text{ m}^3$:

$$\pi R^2 \cdot h = 1,5$$

$$3,14 \cdot (0,6)^2 \cdot h \cong 1,5$$

$$h \cong \frac{1,5}{3,14 \cdot 0,36}$$

$$h \cong 1,33 \text{ m}$$

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2016/2017 2ª Fase

03 - Em uma pesquisa de intenção de voto com 1075 eleitores, foi constatado que 344 pretendem votar no candidato A e 731 no candidato B.

a) Qual é a porcentagem de pessoas entrevistadas que pretendem votar no candidato A?

Resolução:

A porcentagem é dada por:

$$\frac{344}{1075} = 0,32 = 32\%$$

b) Sabendo que esse mesmo grupo de 1075 entrevistados é composto por 571 mulheres e 504 homens, e que 25% dos homens pretendem votar no candidato A, quantas mulheres pretendem votar no candidato B?

Resolução:

Se **M** representa o número de mulheres que pretendem votar no candidato **B**, então:

$$0,75 \cdot 504 + M = 731$$

$$378 + M = 731$$

$$M = 353$$

04 - Responda às seguintes perguntas a respeito da função $g(x) = \frac{3x-4}{1-4x}$:

a) Qual é o domínio de g ?

Resolução:

O denominador da fração racional deve ser diferente de zero:

$$1 - 4x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{1}{4}$$

$$D(g) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{1}{4} \right\}$$

b) Qual é a inversa de g ?

Resolução:

Supondo que **g** seja bijetora, tem-se:

$$g(x) = \frac{3x-4}{1-4x}$$

$$y = \frac{3x-4}{1-4x}$$

$$x = \frac{3y-4}{1-4y}$$

$$x \cdot (1-4y) = 3y-4$$

$$x - 4xy = 3y - 4$$

$$x + 4 = 3y + 4xy$$

$$x + 4 = y \cdot (3 + 4x)$$

$$\frac{x+4}{3+4x} = y$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x+4}{3+4x}, \text{ em que } x \neq -\frac{3}{4}$$

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2016/2017 2ª Fase

05 - Um agricultor tem arame suficiente para construir 120 m de cerca, com os quais pretende montar uma horta retangular de tamanho a ser decidido.

- a) Se o agricultor decidir fazer a horta com todos os lados de mesmo tamanho e utilizar todo o arame disponível cercado apenas três dos seus lados, qual será a área da horta?

Resolução:

Se x é a medida em metros, do lado do quadrado que representa geometricamente a horta, então:

$$3x = 120$$

$$x = 40 \text{ m}$$

Logo, a área da horta é dada por:

$$S = 40^2$$

$$S = 1600 \text{ m}^2$$

- b) Qual é a área máxima que a horta pode ter se apenas três dos seus lados forem cercados e todo o arame disponível for utilizado?

Resolução:

Se x e y representam as dimensões da base e da altura da horta retangular, em metros, então:

$$x + 2y = 120$$

$$x = 120 - 2y$$

Se S representa a área do retângulo, então:

$$S = x \cdot y$$

Substituindo $x = 120 - 2y$, tem-se:

$$S = (120 - 2y) \cdot y$$

$$S = -2y^2 + 120y$$

A área máxima é igual à ordenada do vértice da parábola que representa esta função:

$$S_{\text{máx}} = y_v$$

$$S_{\text{máx}} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$S_{\text{máx}} = -\frac{120^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}{4 \cdot (-2)}$$

$$S_{\text{máx}} = 1800 \text{ m}^2$$

06 - Seja C_1 o círculo de raio $r = 2$ e centro no ponto $P = (3, 4)$.

a) Qual é a equação do círculo C_1 ?

Resolução:

• Considerando equação da circunferência:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

b) Considere o círculo C_2 definido pela equação $x^2 + y^2 = \rho^2$. Para quais valores de ρ o círculo C_1 intersecta o círculo C_2 ?

Resolução:

Para que o círculo C_1 intersecte C_2 é necessário e suficiente que a distância entre os centros seja menor que ou igual à soma das medidas dos raios das circunferências:

• Considerando círculo (iguais):

$$d_{C_1C_2} \leq 2 + \rho$$

$$\sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} \leq 2 + \rho$$

$$5 \leq 2 + \rho$$

$$\rho \geq 3$$

Observações:

a) Erro conceitual no enunciado: círculo é uma superfície limitada por uma circunferência. Esse erro conceitual deve ser levado em consideração para permitir duas respostas no item a) da questão.

$$\text{Equação da circunferência: } x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

$$\text{Equação do círculo: } x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 \leq 0$$

b) A solução que apresentamos (provavelmente seja a intenção do avaliador) está considerando círculo. No caso de se considerar circunferência deveríamos ter como resposta $3 \leq \rho \leq 7$.

07 - Considere a função $f(x) = 4 \cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) - 3$, com $x \in (-\infty, +\infty)$.

a) Qual é o valor mínimo que a função f atinge?

Resolução:

O valor mínimo que f atinge ocorre se $\cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) = -1$:

$$f(x) = 4 \cdot (-1) - 3$$

$$f(x) = -7$$

b) Para que valores de x temos $f(x) = -1$?

Resolução:

$$4 \cdot \cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) - 3 = -1$$

$$4 \cdot \cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) = -1 + 3$$

$$\cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$x = 8k \pm \frac{4}{3}, \text{ em que } k \in \mathbb{Z}$$

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2016/2017 2ª Fase

08 - A velocidade de impressão de uma impressora é calculada em páginas por minuto (ppm). Suponha que determinada impressora tem velocidade de impressão de 15 ppm em preto-e-branco e de 8 ppm em cores.

- a) Quanto tempo essa impressora gasta para imprimir 230 páginas em preto-e-branco? Dê sua resposta no formato $\square\square\text{min}\square\square\text{seg}$.

Resolução:

$$\frac{230}{15} = \frac{225}{15} + \frac{5}{15} = 15 \text{ min} + \frac{1}{3} \text{ min} = 15 \text{ min} + 20 \text{ seg}$$

- b) Trabalhando ininterruptamente durante 30 minutos, essa impressora imprimiu 366 páginas entre preto-e-branco e colorida. Quantas dessas páginas eram coloridas?

Resolução:

Tempo utilizado, em minutos, para imprimir páginas em preto e branco: **P**

Tempo utilizado, em minutos, para imprimir páginas em cores: **C**

$$\begin{cases} P + C = 30 \\ 15P + 8C = 366 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (-8) , tem-se:

$$\begin{cases} -8P - 8C = -240 \\ 15P + 8C = 366 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro ambas as equações, tem-se:

$$7P = 126$$

Substituindo $P = 18$ em $P + C = 30$, tem-se $C = 12$.

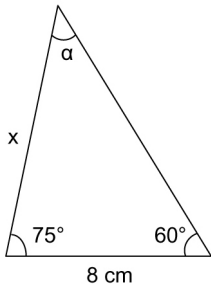
Assim, se foram utilizados 12 minutos para imprimir páginas em cores, a quantidade de páginas coloridas impressas é igual a:

$$12 \cdot 8 = 96$$

Observação de ortografia: "preto e branco" é sem hifens.

09 - Considere o triângulo ao lado.

a) Quanto mede o ângulo α ?



Resolução:

Teorema angular de Tales:

$$\alpha + 75^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + 135^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 135^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

b) Quanto mede x ?

Resolução:

Quanto mede x ?

Lei dos Senos:

$$\frac{x}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{8}{\text{sen } 45^\circ}$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$x = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$x = 4\sqrt{6} \text{ u. c.}$$

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2016/2017 2ª Fase

10 - Dada a função polinomial $p(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$, faça o que se pede:

a) Calcule $p\left(-\frac{2}{5}\right)$.

Resolução:

$$p\left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2 - 7 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) - 2$$

$$p\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125} + \frac{8}{25} + \frac{14}{5} - 2$$

$$p\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{-8 + 40 + 350 - 250}{125}$$

$$p\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{132}{125}$$

b) Encontre as raízes de $p(x)$.

Resolução:

$$p(x) = 0$$

$$x^3 + 2x^2 - 7x - 2 = 0$$

Dispositivo prático de Briot-Ruffini e teorema das raízes racionais (raízes inteiras):

2	1	2	-7	-2
	1	4	1	0

$$(x - 2) \cdot (x^2 + 4x + 1) = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x = 2 \text{ ou } x = -2 \pm \sqrt{3}$$

As raízes de p são 2; $-2 + \sqrt{3}$ ou $-2 - \sqrt{3}$.

$$S = \{2, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}$$