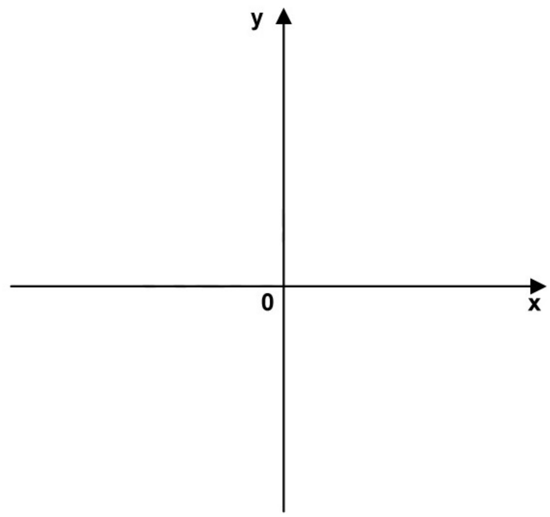
## COMENTÁRIO DA PROVA DE MATEMÁTICA

A UFPR manteve a característica de apresentar questões bem montadas, bem contextualizadas e de qualidade.

Um único senão está na contemplação do programa que, ao nosso ver, deixou de lado temas clássicos como Estatística, Geometria Analítica, Análise combinatória, Binômio de Newton, Números Complexos e Sistemas Lineares. No resto, uma prova que vai premiar os alunos que se dedicaram, mantendo o padrão de qualidade dos anos anteriores.

Professores de Matemática do Curso Positivo.

**01 - Considere as funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-2)$.**




a) Esboce o gráfico de f(x) e g(x) no sistema cartesiano ao lado.

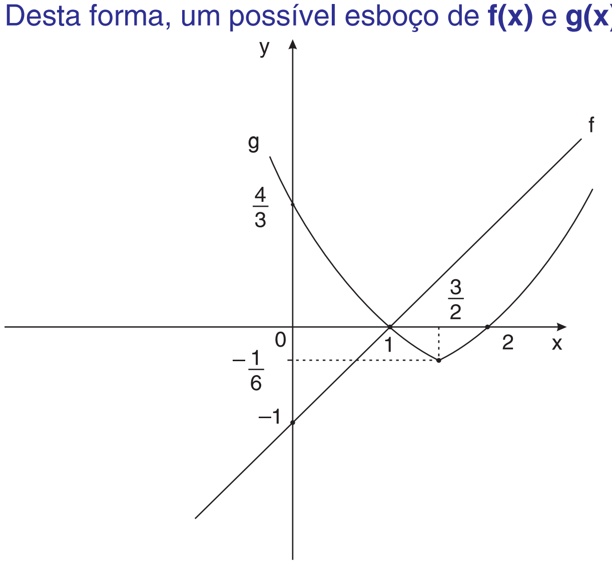
**Comentário:**

A função **f** é afim. Logo, seu gráfico é representado por uma reta.

Além disso, $f(0) = -1$ e $f(1) = 0$.

A função **g** é quadrática. O gráfico de **g** é representado por uma parábola com concavidade voltada para cima, cujos zeros são 1 ou 2. Por outro lado, $g(0) = \frac{4}{3}$ e $g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{6}$.

Desta forma, um possível esboço de **f(x)** e **g(x)** no sistema cartesiano dado pode ser:



b) Calcule as coordenadas (x,y) dos pontos de interseção dos gráficos de f(x) e g(x).

$$g(x) = f(x)$$

$$\frac{2}{3}(x-1)(x-2) = (x-1)$$

$$\frac{2}{3}(x-1)(x-2) - (x-1) = 0$$

$$(x-1) \cdot \left[\frac{2}{3}(x-2) - 1\right] = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot (x-1) \cdot (2x-7) = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ ou } 2x - 7 = 0$$

$$x = 1 \text{ ou } x = \frac{7}{2}$$

Substituindo os valores de **x** na função **f**, por exemplo, tem-se:

$$f(1) = 0 \text{ e } f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

Portanto, as coordenadas dos pontos de intersecção dos gráficos de **f** e **g** são (1; 0) e $\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

**02 - Uma caixa contém 7 lápis azuis, 5 vermelhos e 9 amarelos. Sabendo que a caixa contém somente esses lápis, responda:**

a) Qual o número mínimo de lápis que devemos retirar (sem olhar a cor) para que estejamos certos de haver retirado 4 lápis de uma mesma cor? Justifique sua resposta.

**Comentário:**

Como são 3 cores, é possível, em 9 lápis retirados, obtermos 3 lápis azuis, 3 vermelhos e 3 amarelos. Logo, não podemos estar certos de que, com 9 lápis retirados, teríamos 4 lápis de uma mesma cor. Entretanto, como não há mais cores, em 10 lápis retirados, certamente ao menos 4 deles possuiriam a mesma cor. Portanto, o número mínimo de lápis que devemos retirar (sem olhar a cor) para que estejamos certos de haver retirado, no mínimo, 4 lápis de uma mesma cor, é igual a 10.

b) Se retirarmos ao acaso 3 lápis dessa caixa (sem olhar a cor), qual é a probabilidade de que todos sejam da cor amarela?

**Comentário:**

A probabilidade de que todos os 3 lápis retirados sejam amarelos é dada por:

$$p = \frac{9}{21} . \frac{8}{22} . \frac{7}{19} = \frac{6}{95}$$

**03 - Numa expedição arqueológica em busca de artefatos indígenas, um arqueólogo e seu assistente encontraram um úmero, um dos ossos do braço humano. Sabe-se que o comprimento desse osso permite calcular a altura aproximada de uma pessoa por meio de uma função do primeiro grau.**

a) Determine essa função do primeiro grau, sabendo que o úmero do arqueólogo media 40 cm e sua altura era 1,90 m, e o úmero de seu assistente media 30 cm e sua altura era 1,60 m.

**Comentário:**

Uma função definida por um polinômio do 1º grau é denominada função afim. A lei de associação da função afim solicitada tem a forma $\mathbf{y = ax + b}$**,** em que y é a medida da altura e **x** é a medida do comprimento do úmero, ambos em cm.

Para $x = 40$, tem-se $y = 190$, então substituindo estes valores na função afim, tem-se:

$190 = 40a + b$  (I)

Para $x = 30$ tem-se $y = 160$, então:

$160 = 30a + b$  (II)

Fazendo (I) – (II), tem-se:

$30 = 10a$

$a = 3$

Substituindo $a = 3$ em (II), tem-se:

$160 = 30 \,.\, 3 + b$

$b = 70$

Logo, a lei de associação da função afim é dada por $\mathbf{y = 3x + 70}$, com $x, y \in IR_+^*$.

b) Se o úmero encontrado no sítio arqueológico media 32 cm, qual era a altura aproximada do indivíduo que possuía esse osso?

**Comentário:**

Substituindo x por 32 na função $y = 3x + 70$, temos:

$y = 3.32 + 70$

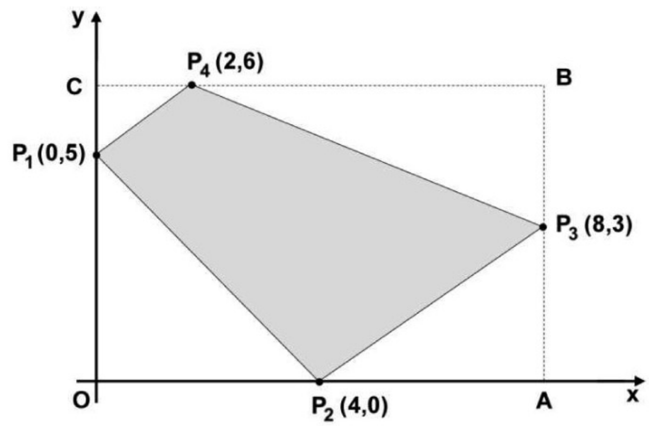
$y = 96 + 70$

$y = 166$

$y = 1{,}66$ m

Portanto, a altura do indivíduo é 1,66 m.

04 - **Calcule a área do quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$, cujas coordenadas cartesianas são dadas na figura ao lado.**




**Comentário:**

**1º modo**

A medida da área do quadrilátero, representada por **S**, é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}|44|$$

S = 22 unidades de área

**2º modo**

A área do quadrilátero também poderia ser obtida retirando-se do retângulo OABC quatro triângulos retângulos:

$$S = S_{OABC} - S_{OP_1P_2} - S_{AP_2P_3} - S_{BP_3P_4} - S_{CP_1P_4}$$

$$S = 8.6 - \frac{4.5}{2} - \frac{4.3}{2} - \frac{6.3}{2} - \frac{2.1}{2}$$

$$S = 48 - 10 - 6 - 9 - 1$$

S = 22 unidades de área

**05 -** **A tela de uma TV está no formato *widescreen,* no qual a largura e a altura estão na proporção de 16 para 9. Sabendo que a diagonal dessa tela mede 37 polegadas, qual é sua largura e a sua altura, em centímetros?**
**(Para simplificar os cálculos, use as aproximações $\sqrt{337} \approx 18{,}5$ e 1 polegada $\approx 2{,}5$ cm)**

**Comentário:**

Sendo L e H a largura e a altura, respectivamente, temos:

$\frac{L}{16} = \frac{H}{9} = x$ (x é a constante de proporcionalidade)

$L = 16x$ e $H = 9x$

Pelo teorema de Pitágoras:

$37^2 = (9x)^2 + (16x)^2$

$37^2 = 337x^2$

$$x = \frac{\sqrt{37^2}}{\sqrt{337}} \approx \frac{37}{18{,}5} = 2$$

Logo, pode-se concluir corretamente que:

- Largura: 16 . 2 . 2,5 = 80 cm
- Altura: 9 . 2 . 2,5 = 45 cm

Assim, a largura e a altura medem, respectivamente, 80 cm e 45 cm.

**06 - Um grupo de cientistas decidiu utilizar o seguinte modelo logístico, bastante conhecido por matemáticos e biólogos, para estimar o número de pássaros, P(t), de determinada espécie numa área de proteção ambiental:**

**$P(t) = \dfrac{500}{1+2^{2-t}}$, sendo t o tempo em anos e $t = 0$ o momento em que o estudo foi iniciado.**

a) Em quanto tempo a população chegará a 400 indivíduos?

**Comentário:**

Para P(t) = 400, tem-se:

$$P(t) = \frac{500}{1+2^{2-t}}$$

$$400 = \frac{500}{1+2^{2-t}}$$

$$1 + 2^{2-t} = \frac{500}{400}$$

$$2^{2-t} = \frac{5}{4} - 1$$

$$2^{2-t} = 2^{-2}$$

$$2 - t = -2$$

$$t = 4$$

Logo, em 4 anos a população chegará a 400 indivíduos.

b) À medida que o tempo t aumenta, o número de pássaros dessa espécie se aproxima de qual valor? Justifique sua resposta.

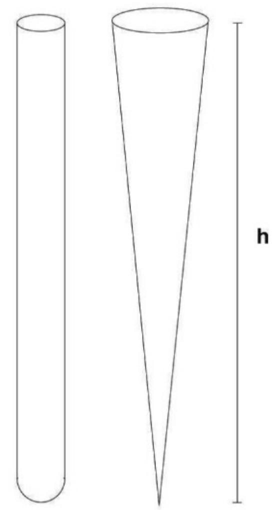
**Comentário:**

À medida que **t** aumenta, o valor de $2^{2-t}$ tende a zero. Desta forma, P(t) tenderá a:

$$\frac{500}{1+0} = 500$$

Ou seja, o número de pássaros se aproxima de 500 indivíduos.

**07 - Num laboratório há dois tipos de recipientes, conforme a figura ao lado. O primeiro, chamado de “tubo de ensaio”, possui internamente o formato de um cilindro circular reto e fundo semiesférico. O segundo, chamado de “cone de Imhoff”, possui internamente o formato de um cone circular reto.**




a) Sabendo que o volume de um cone de Imhoff, com raio da base igual a 2 cm, é de 60 ml, calcule a altura h desse cone.

**Comentário:**

$$V = \frac{1}{3}\pi \,.\, r^2 \,.\, h$$

$$60 = \frac{1}{3}\pi \,.\, 2^2 \,.\, h$$

$$h = \frac{45}{\pi}\text{ cm}$$

b) Calcule o volume (em mililitros) do tubo de ensaio com raio da base medindo 1 cm e que possui a mesma altura h do cone de Imhoff.

**Comentário:**

$$V = \pi \,.\, r^2 \,.\, (h - r) + \frac{1}{2} \,.\, \frac{4}{3}\pi \,.\, r^3$$

$$V = \pi\, 1^2 \,.\left(\frac{45}{\pi} - 1\right) + \frac{1}{2} \,.\, \frac{4}{3}\pi\, 1^3$$

$$V = 45 - \pi + \frac{2}{3}\pi$$

$$V = 45 - \frac{\pi}{3}\text{ mL}$$

$$V = \frac{135 - \pi}{3}\text{ mL}$$

**08 - Suponha que, durante um certo período do ano, a temperatura T, em graus Celsius, na superfície de um lago possa ser descrita pela função $F(t) = 21 - 4\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, sendo t o tempo em horas medido a partir das 06h00 da manhã.**

a) Qual a variação de temperatura num período de 24 horas?

**Comentário:**

A temperatura máxima ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1$, ou seja:

$$F(t) = 21 - 4 . (-1) = 25^oC \rightarrow T = 25^oC$$

A temperatura mínima ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1$, ou seja:

$$F(t) = 21 - 4 . (1) = 17^oC \rightarrow T = 17^oC$$

Logo, a variação é de $17^oC$ a $25^oC$.

b) A que horas do dia a temperatura atingirá $23^o C$ ?

**Comentário:**

$$F(t) = 23^oC$$

$$23 = 21 - 4\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

$$4\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -2$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{12}t = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{12}t = \frac{4\pi}{3}$$

t = 8h ou t = 16h

Como o tempo foi medido a partir das 06h00 da manhã, os horários em que a temperatura atingirá $23^oC$, respectivamente, 8 horas e 16 horas após às 06h 00m da manhã, serão:

6 + 8 = 14h 00m

6 + 16 = 22h 00m

**09 - Uma quantia inicial de R$ 1.000,00 foi investida em uma aplicação financeira que rende juros de 6%, compostos anualmente. Qual é, aproximadamente, o tempo necessário para que essa quantia dobre? (Use $\log_2(1{,}06) \approx 0{,}084$.)**

**Comentário:**

O montante **M** produzido por um capital **C**, durante o tempo **t** a uma taxa de juros compostos **i**, ambos na mesma unidade de tempo, é dado por:

$M = C \, . \, (1 + i)^t$

Para que o Capital inicial de R$ 1.000,00 dobre, o tempo necessário **t**, em anos, é dado por:

$2000 = 1000 \, . \, (1 + 0{,}06)^t$

$2 = (1{,}06)^t$

Tomando o logaritmo na base 2 a ambos os membros, tem-se:

$\log_2 2 = \log_2 (1{,}06)^t$

$1 = t \, . \, \log_2 1{,}06$

$1 \approx t \, . \, 0{,}084$

$$t \approx \frac{1}{0{,}084} = \frac{1000}{84}$$

$t \approx 11{,}9$ anos

Portanto, em aproximadamente 12 anos o capital irá duplicar.

**10 - Considere o polinômio** $p(x)=\begin{bmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{bmatrix}$

**Calcule as raízes de p(x). Justifique sua resposta, deixando claro se utilizou propriedades de determinantes ou algum método para obter as raízes do polinômio.**

**Comentário:**

A notação do polinômio p(x) está incorreta. A correta para representar o determinante deve ser:

$$p(x)=\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

**1ª solução:**

Resolvendo o determinante pela regra de Sarrus, tem-se:

$p(x) = -9x - 9x - 4x^2 + x^3 + 36 + 9x$

$p(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$

$p(x) = x^2 . (x - 4) - 9(x - 4)$

$p(x) = (x - 4) . (x^2 - 9)$

$p(x) = (x - 3) . (x + 3) . (x - 4)$

$p(x) = 0 \rightarrow x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = 4$

**2ª solução:**

Para x = 3, a primeira e a segunda colunas do determinante são iguais, da mesma forma que a primeira e a terceira linhas:

$$p(3)=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

Para x = –3, tanto a primeira e a segunda colunas do determinante são opostas, quanto a primeira e a terceira linhas:

$$p(-3)=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -4 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

Para x = 4, a segunda e a terceira colunas do determinante são opostas, além de a primeira e a segunda linhas serem iguais:

$$p(4)=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

Em todas essas situações o determinante é nulo, ou seja, p(3) = p(–3) = p(4) = 0.

Portanto, as raízes de p(x) são 3, –3 ou 4.

**3ª solução:**

Calculando o determinante, usando o teorema de Jacobi, a saber: multiplicando a primeira coluna por 1 e somando à segunda coluna, o determinante não se altera, temos:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x+3 & -x \\ 3 & x+3 & -4 \\ x & x+3 & -3 \end{vmatrix}$$

dividindo a segunda coluna por (x + 3) e multiplicando o determinante por (x + 3), vem:

$$p(x) = (x + 3) \,.\, \begin{vmatrix} 3 & 1 & -x \\ 3 & 1 & -4 \\ x & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Teorema de Jacobi: multiplicando a primeira linha por (–1) e somando à segunda linha, o determinante não se altera, temos:

$$p(x) = (x + 3) \,.\, \begin{vmatrix} 3 & 1 & -x \\ 0 & 0 & x-4 \\ x & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

calculando o determinante pelo teorema de Laplace, vem:

$$p(x) = (x + 3) \,.\, (x - 4) \,.\, (-1)^{2+3} \,.\, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

$$p(x) = (x + 3) \,.\, (x - 4) \,.\, (-1) \,.\, (3 - x)$$

igualando a zero, temos as raízes:

$x + 3 = 0 \therefore x = -3$

$x - 4 = 0 \therefore x = 4$

$3 - x = 0 \therefore x = 3$

Resposta: As raízes de p(x) são: –3 e 3 e 4.