COMENTÁRIO DA PROVA DE MATEMÁTICA

Quanto ao nível: A prova apresentou questões simples, médias e de melhor nível, o que traduz uma virtude num processo de seleção.

Quanto à abrangência: Uma prova com 9 questões naturalmente compromete esse quesito. Temas clássicos como Progressões, Análise Combinatória, Probabilidade, Binômio de Newton, Números Complexos, Polinômios, Equações Algébricas, Sistemas de Equações, Matrizes e Determinantes e Lógica ficaram de fora, o que traduz um aspecto negativo no processo. Acreditamos que com um pouco mais de criatividade seria plenamente possível ampliar a abrangência, o que legitimaria mais qualquer instrumento de aferição de conhecimento.

55 - O aplicativo de celular de um aeroporto apresenta o tempo que falta, em minutos, até a decolagem de cada voo. Às 13h37min., Marcelo usou o aplicativo e descobriu que faltavam 217 minutos para a decolagem de seu voo. Supondo que não haja atrasos, a que horas o voo de Marcelo deverá decolar?

a) 15h54min.
b) 16h14min.
c) 16h34min.
►d) 17h14min.
e) 17h54min.

Resolução:

O tempo igual a 217 minutos equivale a 3h 37min.

Adicionando este tempo ao horário observado, temos:

13h 37min + 3h 37min = 16h 74min = 16h + 1h 14min = 17h 14min

56 - Um prisma possui 17 faces, incluindo as faces laterais e as bases inferior e superior. Uma pirâmide cuja base é idêntica à base do prisma, possui quantas arestas?

a) 26.
b) 28.
►c) 30.
d) 32.
e) 34.

Resolução:

Se o prisma possui 17 faces, então possui 15 faces laterais e 2 faces bases (bases inferior e superior). Logo, o prisma é pentadecagonal, ou seja, os dois polígonos das bases possuem, cada um, 15 lados. Portanto, a pirâmide cuja base é idêntica à base do prisma possui 15 arestas de base e 15 arestas laterais, ou seja, a pirâmide possui 15 + 15 = 30 arestas.

57 - Na seguinte passagem do livro *Alice no País das Maravilhas,* a personagem Alice diminui de tamanho para entrar pela porta de uma casinha, no País das Maravilhas.

"…chegou de repente a um lugar aberto, com uma casinha de cerca de um metro e vinte centímetros de altura… e não se aventurou a chegar perto da casa antes de conseguir se reduzir a vinte e dois centímetros de altura".

Carroll, L. *Aventuras de Alice no País das Maravilhas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

Suponha que, no mundo real e no País das Maravilhas, a proporção entre as alturas de Alice e da casa sejam as mesmas. Sabendo que a altura real de Alice é de 1,30 m, qual seria a altura aproximada da casa no mundo real?

a) 3,5 m.
b) 4,0 m.
c) 5,5 m.
►d) 7,0 m.
e) 8,5 m

Resolução:

Suponha que a medida da altura da casa no mundo real seja igual a **H**, em metros. Se a razão entre as alturas da casa e de Alice, tanto no mundo real, quanto no País das Maravilhas, são iguais, então:

$$\frac{1{,}20\,\text{m}}{22\,\text{cm}} = \frac{H}{1{,}30\,\text{m}}$$

$$\frac{120\,\text{m}}{22\,\text{cm}} = \frac{H}{1{,}30\,\text{m}}$$

$$H = \frac{120}{22} \, . \, 1{,}30$$

$$H \cong 7{,}1 \text{ m}$$

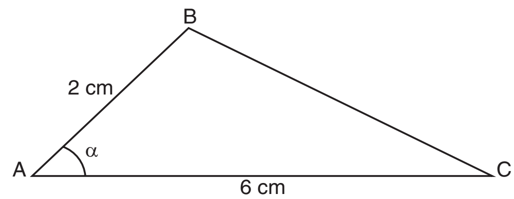
Logo, a altura aproximada da casa no mundo real é igual a 7,0 m.

58 - Um triângulo possui lados de comprimento 2 cm e 6 cm e área de 6 cm². Qual é a medida do terceiro lado desse triângulo?

a) $2\sqrt{6}$ cm.
►b) $2\sqrt{10}$ cm.
c) 5 cm.
d) $5\sqrt{2}$ cm.
e) 7 cm.

Resolução:

Considere o seguinte triângulo **ABC**:



Se a área deste triângulo é igual a 6 cm^2, então:

$S = \frac{1}{2} . AB . AC . \text{sen}\ \alpha$

$6 = \frac{1}{2} . 2. 6. \text{sen}\ \alpha$

$1 = \text{sen}\ \alpha$

$\alpha = 90^o\ (0^o < \alpha < 180^o)$

Como o vértice **A** possui ângulo reto, **ABC** é um triângulo retângulo. Para determinar **BC**, podemos utilizar o teorema de Pitágoras:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$(BC)^2 = 2^2 + 6^2$

$(BC)^2 = 40$

$BC = \pm\sqrt{40}$

$BC = 2\sqrt{10}\ (BC > 0)$

Desta forma, a medida do terceiro lado é igual a $2\sqrt{10}$ cm.

59 - Em um grupo de 6 pessoas, a média das idades é 17 anos, a mediana é 16,5 anos e a moda é 16 anos. Se uma pessoa de 24 anos se juntar ao grupo, a média e a mediana das idades do grupo passarão a ser, respectivamente:

a) 17 anos e 17 anos.
►b) 18 anos e 17 anos.
c) 18 anos e 16,5 anos.
d) 20,5 anos e 16,5 anos.
e) 20,5 anos e 20,25 anos.

Resolução:

Sejam $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b} \le \boldsymbol{c} \le \boldsymbol{d} \le \boldsymbol{e} \le \boldsymbol{f}$ as idades, em números inteiros de anos, das 6 pessoas do grupo. Se a mediana é igual a 16,5 anos e a moda é igual a 16 anos, então, necessariamente:

b = c = 16 anos e d = 17 anos

Se a média aritmética das seis idades é igual a 17 anos, então:

$$\frac{a+16+16+17+e+f}{6} = 17$$

$$a + e + f = 53$$

Introduzindo-se uma pessoa de 24 anos no grupo, o novo valor da média será dado por:

$$\overline{X} = \frac{a+16+16+17+e+f+24}{7}$$

Como $a + e + f = 53$, temos:

$$\overline{X} = \frac{16+16+17+24+53}{7}$$

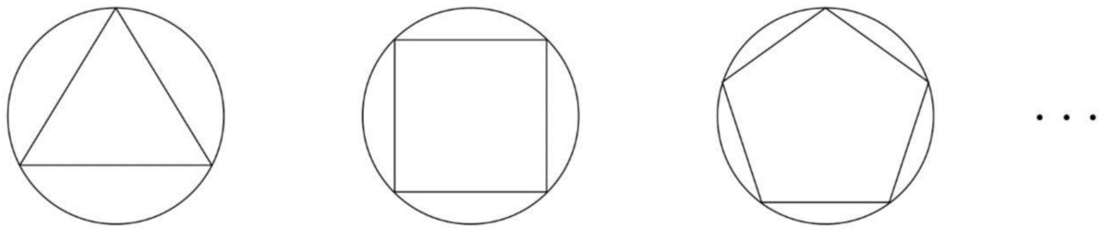
$$\overline{X} = \frac{126}{7}$$

$$\overline{X} = 18$$

Logo, a média aritmética das idades será igual a 18 anos.

Com o acréscimo do valor 24 ao conjunto dado, o novo conjunto fica formado por 7 termos. Portanto, a mediana das idades será o valor do termo central (4º termo), ou seja, 17 anos.

60 - Considere a seguinte sequência de polígonos regulares inscritos em um círculo de raio 2 cm:



Sabendo que a área A de um polígono regular de n lados dessa sequência pode ser calculada pela fórmula

$$A = 2n \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

considere as seguintes afirmativas:

1. **As áreas do triângulo equilátero e do quadrado nessa sequência são, respectivamente, $3\sqrt{3}$ cm² e 8 cm².**
2. **O polígono regular de 12 lados, obtido nessa sequência, terá área de 12 cm².**
3. **À medida que n aumenta, o valor A se aproxima de 4π cm².**

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
b) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
►e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

Resolução:

1. Verdadeira

As medidas das áreas do triângulo equilátero e do quadrado nessa sequência são, respectivamente, dadas por:

$$A_3 = 2 \,.\, 3 \,.\, \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6 \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$A_4 = 2 \,.\, 4 \,.\, \text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 8 \,.\, 1 = 8\ \text{cm}^2$$

2. Verdadeira

Substituindo n = 12 na fórmula, temos:

$$A_{12} = 2 \,.\, 12 \,.\, \text{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\right) = 24.\ \frac{1}{2} = 12\ \text{cm}^2$$

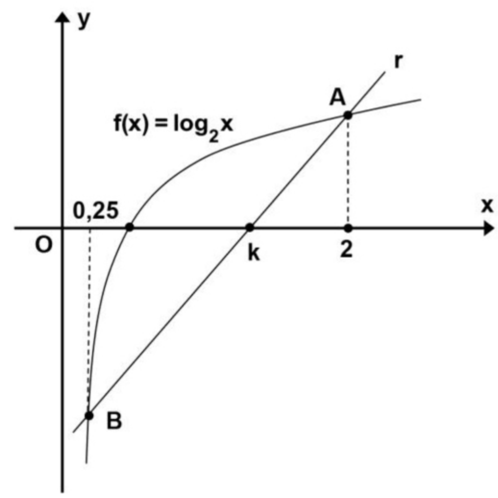
Logo, o polígono regular de 12 lados terá área de 12 cm².

3. Verdadeira

À medida que **n** aumenta, a área de um polígono regular tende à área do círculo que circunscreve cada polígono regular. Assim, o valor **A** se aproxima de $\pi r^2 = \pi \,.\, 2^2 = 4\pi$ cm².

61 - Considere o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ e a reta r que passa pelos pontos A e B, como indicado na figura ao lado, sendo k a abscissa do ponto em que a reta r intersecta o eixo Ox. Qual é o valor de k?

►a) 17/12.
b) 14/11.
c) 12/7.
d) 11/9.
e) 7/4.



Resolução:

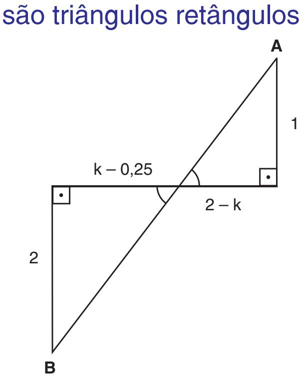
Cálculo das coordenadas do ponto **A**:

$x = 2 \to f(2) = \log_2 2 = 1 \to A\ (2;\ 1)$

Cálculo das coordenadas do ponto **B**:

$x = 0{,}25 \to f(0{,}25) = \log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2 \to B\ (0{,}25;\ -2)$

Os dois triângulos, com vértices em **A** e em **B**, são triângulos retângulos e semelhantes:



Pela semelhança existente entre os triângulos, temos:

$$\frac{k-0{,}25}{2} = \frac{2-k}{1}$$

$k - 0{,}25 = 4 - 2k$

$3k = 4{,}25$

Multiplicando membro a membro por 4, tem-se:

$12\,k = 17$

$$k = \frac{17}{12}$$

62 - A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1000 \cdot 2^{0,0625 \cdot t}$ fornece uma boa aproximação do valor V (em reais) em função do tempo t (em anos), desde o início da aplicação. Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará?

a) 8.
b) 12.
►c) 16.
d) 24.
e) 32.

Resolução:

O valor inicial é obtido substituindo **t = 0** na expressão dada:

$V(0) = 1000 \,.\, 2^{0,0625\,.\,0} = 1000 \,.\, 2^0 = 1000$ reais

O valor inicial duplicará se **V(t) = 2000** reais, ou seja:

$2000 = 1000 \,.\, 2^{0,0625t}$

$2^1 = 2^{0,0625t}$

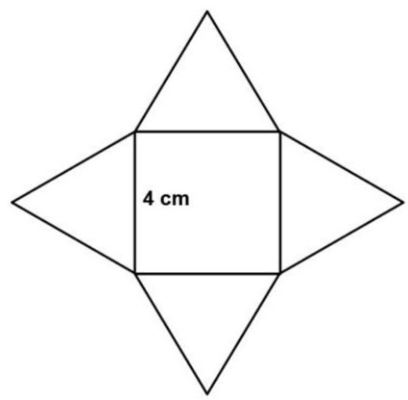
$1 = 0,0625t$

$\dfrac{1}{0,0625} = t$

$t = 16$

Logo, o valor inicial dobrará após 16 anos.

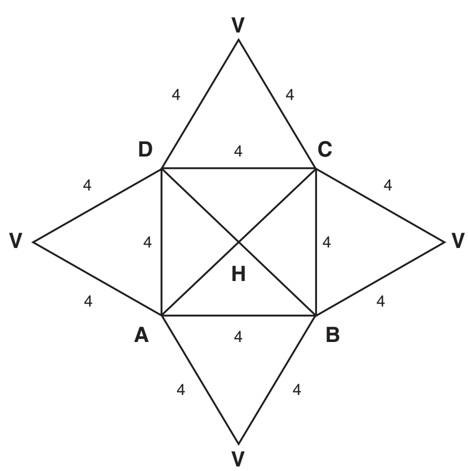
63 - Temos, ao lado, a planificação de uma pirâmide de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Qual é o volume dessa pirâmide?



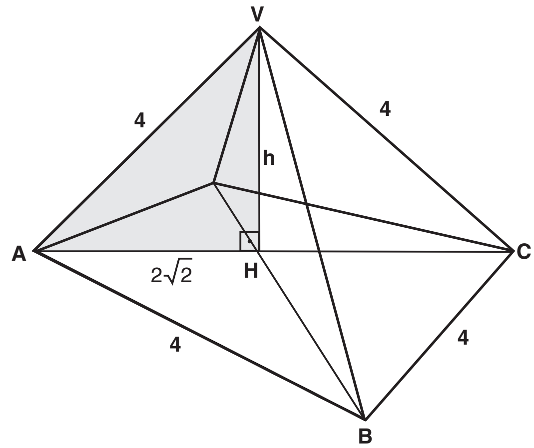
a) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm^3.
b) $16\sqrt{3}$ cm^3.
c) 32 cm^3.
►d) $\frac{32}{3}\sqrt{2}$ cm^3.
e) $\frac{64}{3}$ cm^3.

Resolução:

Na mesma planificação apresentada, os vértices são os pontos **A, B, C, D** e **V**, e **H** é o centro geométrico do quadrado (ponto de intersecção das diagonais):



Na próxima ilustração, pode-se observar a pirâmide **VABCD**, obtida a partir da planificação apresentada anteriormente:



A base da pirâmide é um quadrado de lado 4 cm. O ponto **H** é a projeção ortogonal do vértice **V** sobre o plano da base **ABCD** da pirâmide. Além disso, $AC = BD = 4\sqrt{2}$ cm, são as medidas das diagonais de um quadrado de 4 cm de lado. O ponto **H** é ponto médio das diagonais. Logo, $AH = 2\sqrt{2}$ cm. O triângulo **AHV**, destacado na ilustração, é um triângulo retângulo. Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AV)^2 = (AH)^2 + (VH)^2$

$4^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + h^2$

$16 = 8 + h^2$

$8 = h^2$

$h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $(h > 0)$

O volume da pirâmide é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2}$

$V = \frac{32}{3}\sqrt{2}$

Portanto, o volume da pirâmide é igual a $\frac{32}{3}\sqrt{2}$ cm^3.