

COMENTÁRIO DA PROVA DE MATEMÁTICA

A prova de Matemática da UFPR manteve a tradição de qualidade, que é a marca dessa prova nos últimos anos.

É possível detectar, no entanto, uma mudança de perfil da prova, ajustando-se mais às características esperadas para uma prova de 1ª fase, com questões no geral um pouco mais acessíveis, se comparadas com as dos anos anteriores. No mais, foram mantidas as características importantes para uma prova com a atribuição de um instrumento de aferição de conhecimentos, como a originalidade de algumas questões e a precisão dos enunciados. Lamentamos apenas o descuido no enunciado da questão 18, não mencionando o fato de a soma dos pesos ser igual a 1, o que faz com que não exista apenas uma alternativa correta.

Se analisarmos a abrangência do programa Ensino Médio, podemos avaliar que em torno de 50% foi alcançado. Acreditamos ser isso uma consequência do número restrito de questões (apenas 9).

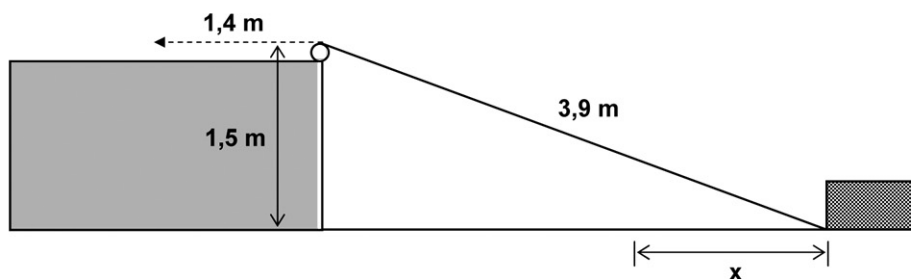
É importante salientar que a cobrança sistemática nos tópicos de forma ampla traduz um elemento motivador para o aluno do Ensino Médio. Por isso, é algo a lamentar o “abandono” nos últimos anos de temas clássicos como Números Complexos, Geometria de Posição e Binômio de Newton.

Mais uma vez parabenizamos a Comissão Organizadora.

Equipe de professores do Curso Positivo

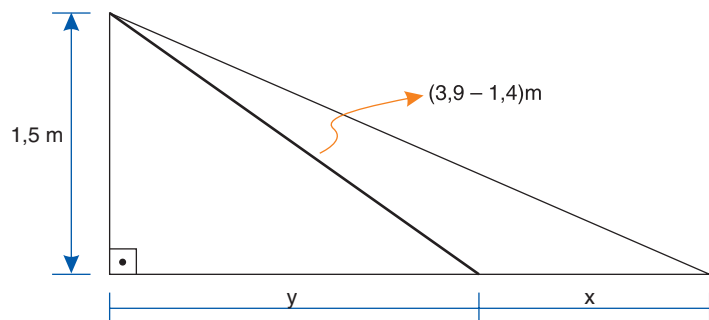
10 - Uma corda de 3,9 m de comprimento conecta um ponto na base de um bloco de madeira a uma polia localizada no alto de uma elevação, conforme o esquema abaixo. Observe que o ponto mais alto dessa polia está 1,5 m acima do plano em que esse bloco desliza. Caso a corda seja puxada 1,4 m, na direção indicada abaixo, a distância x que o bloco deslizará será de:

- a) 1,0 m.
- b) 1,3 m.
- *c) 1,6 m.
- d) 1,9 m.
- e) 2,1 m.



Comentário:

Assunto: teorema de Pitágoras



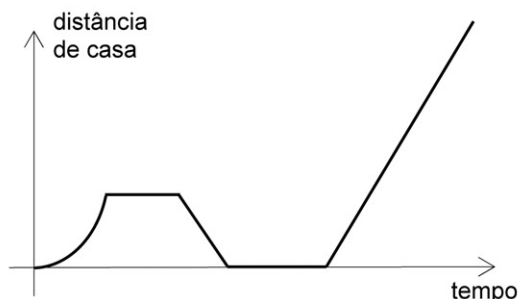
Triângulo menor

$$\begin{aligned} \bullet (3,9 - 1,4)^2 &= 1,5^2 + y^2 \\ 2,5^2 &= 1,5^2 + y^2 \\ y^2 &= 4 \rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

Triângulo maior

$$\begin{aligned} \bullet 3,9^2 &= 1,5^2 + (2 + x)^2 \\ 12,96 &= (2 + x)^2 \\ 3,6 &= 2 + x \rightarrow x = 1,6 \end{aligned}$$

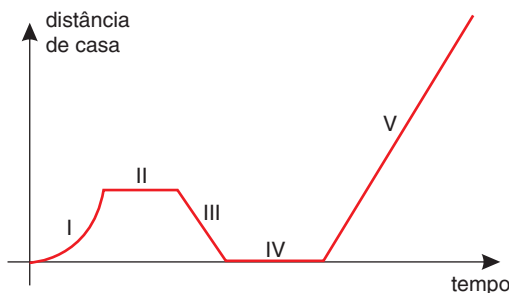
11 - Assinale a alternativa que apresenta a história que melhor se adapta ao gráfico.



- a) Assim que saí de casa lembrei que deveria ter enviado um documento para um cliente por *e-mail*. Resolvi voltar e cumprir essa tarefa. Aproveitei para responder mais algumas mensagens e, quando me dei conta, já havia passado mais de uma hora. Saí apressada e tomei um táxi para o escritório.
- *b) Saí de casa e quando vi o ônibus parado no ponto corri para pegá-lo. Infelizmente o motorista não me viu e partiu. Após esperar algum tempo no ponto, resolvi voltar para casa e chamar um táxi. Passado algum tempo, o táxi me pegou na porta de casa e me deixou no escritório.
- c) Eu tinha acabado de sair de casa quando tocou o celular e parei para atendê-lo. Era meu chefe, dizendo que eu estava atrasado para uma reunião. Minha sorte é que nesse momento estava passando um táxi. Acenei para ele e poucos minutos depois eu já estava no escritório.
- d) Tinha acabado de sair de casa quando o pneu furou. Desci do carro, troquei o pneu e finalmente pude ir para o trabalho.
- e) Saí de casa sem destino – estava apenas com vontade de andar. Após ter dado umas dez voltas na quadra, cansei e resolvi entrar novamente em casa.

Comentário:

Assunto: relação de dependência entre grandezas (função)
análise de gráficos



Trecho I : a distância **d** aumenta de “forma acentuada” à medida que aumenta o tempo.

Trecho II : a distância **d** permanece a mesma durante certo intervalo de tempo.

Trecho III : a distância **d** diminui à medida que aumenta o tempo.

Trecho IV : a distância **d** é zero durante certo intervalo de tempo.

Trecho V : a distância **d** aumenta à mesma taxa quando o tempo aumenta.

Analisando as alternativas, relevando aspectos práticos explicados pela física (as transições entre os trechos), temos como resposta a letra **b**.

12 - Qual das seguintes retas passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 + 4y - 3 = 0$?

- *a) $x + 2y = 4$.
- b) $5x - y = 2$.
- c) $x + y = 0$.
- d) $x - 5y = -2$.
- e) $2x + y = 7$.

Comentário:

O gabarito correto é a letra **b** (e não **a**).

$x^2 + y^2 + 4y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 7$, portanto o centro é $(0, -2)$

Substituindo $x = 0$ e $y = -2$, temos na alternativa b que:

$$5 \cdot 0 - (-2) = +2 = 2$$

que é verdadeira.

13 - Em uma população de aves, a probabilidade de um animal estar doente é $1/25$. Quando uma ave está doente, a probabilidade de ser devorada por predadores é $1/4$, e, quando não está doente, a probabilidade de ser devorada por predadores é $1/40$. Portanto, a probabilidade de uma ave dessa população, escolhida aleatoriamente, ser devorada por predadores é de:

- a) 1,0%.
- b) 2,4%.
- c) 4,0%.
- *d) 3,4%.
- e) 2,5%.

Comentário:

Sejam as seguintes probabilidades:

- $p(D)$: probabilidade de uma ave escolhida ao acaso estar doente;
- $p(\bar{D})$: probabilidade de uma ave escolhida ao acaso não estar doente;
- $p(P/D)$: probabilidade de uma ave escolhida ser devorada por predadores dado que ela está doente;
- $p(P/\bar{D})$: probabilidade de uma ave escolhida ser devorada por predadores dado que ela não está doente;
- $p(P)$: probabilidade de uma ave escolhida ao acaso ser devorada por predadores.

Das informações do enunciado, temos:

- $p(D) = \frac{1}{25}$
- $p(P/D) = \frac{1}{4}$
- $p(P/\bar{D}) = \frac{1}{40}$

Então:

$$p(D) + p(\bar{D}) = 1$$

$$\frac{1}{25} + p(\bar{D}) = 1$$

$$p(\bar{D}) = \frac{24}{25}$$

Logo, a probabilidade de uma ave dessa população, escolhida ao acaso, ser devorada por predadores é dada por:

$$p(P) = p(D \cdot P) + p(\bar{D} \cdot P)$$

$$p(P) = p(D) \cdot p(P/D) + p(\bar{D}) \cdot p(P/\bar{D})$$

$$p(P) = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{4} + \frac{24}{25} \cdot \frac{1}{40}$$

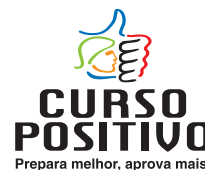
$$p(P) = \frac{1}{100} + \frac{24}{1000}$$

$$p(P) = 0,01 + 0,024$$

$$p(P) = 0,034 = 3,4 \%$$

Resposta: d

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2009/2010 - 1ª Fase

MATEMÁTICA

14 - Suponha que o horário do pôr do sol na cidade de Curitiba, durante o ano de 2009, possa ser descrito pela função

$$f(t) = 18,8 - 1,3 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{365} t \right)$$

sendo t o tempo dado em dias e $t = 0$ o dia 1º de janeiro. Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

1. O período da função acima é 2π .
2. Foi no mês de abril o dia em que o pôr do sol ocorreu mais cedo.
3. O horário em que o pôr do sol ocorreu mais cedo foi 17h30.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
- b) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
- c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
- *d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
- e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

Comentário:

$$f(t) = 18,8 - 1,3 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{365} t \right)$$

1. **Falsa**

$$p = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{365}} = 365$$

2. **Verdadeira**

$$\bullet \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{365} t \right) = 1$$

$$\frac{2\pi}{365} \cdot t = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{365}{4} = 91,25$$

Assim, 91,25 dias depois de iniciar o ano, teremos o sol se pondo mais cedo (mês de abril).

3. **Verdadeira**

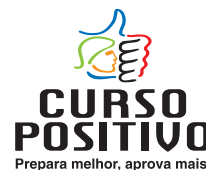
$$\bullet \text{Fazendo } \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{365} t \right) = 1, \text{ temos}$$

$$f(t) = 18,8 - 1,3 \cdot 1$$

$$f(t) = 17,5 \Rightarrow 17,5 \text{ horas}$$

Resposta: D

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2009/2010 - 1ª Fase

MATEMÁTICA

15 - Para testar a eficiência de um tratamento contra o câncer, foi selecionado um paciente que possuía um tumor de formato esférico, com raio de 3 cm. Após o início do tratamento, constatou-se, através de tomografias, que o raio desse tumor diminuiu a uma taxa de 2 mm por mês. Caso essa taxa de redução se mantenha, qual dos valores abaixo se aproxima mais do percentual do volume do tumor original que restará após 5 meses de tratamento?

- *a) 29,6%
- b) 30,0%
- c) 30,4%
- d) 30,8%
- e) 31,4%

Comentário:

Raio inicial: 3 cm = 30 mm

1º mês = 28 mm

2º mês = 26 mm

3º mês = 24 mm

4º mês = 22 mm

5º mês = 20 mm = 2 cm

$$\bullet V_{\text{inicial}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$$

$$\bullet V_{\text{inicial}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}$$

$$\text{Razão} = \frac{V_{\text{final}}}{V_{\text{inicial}}}$$

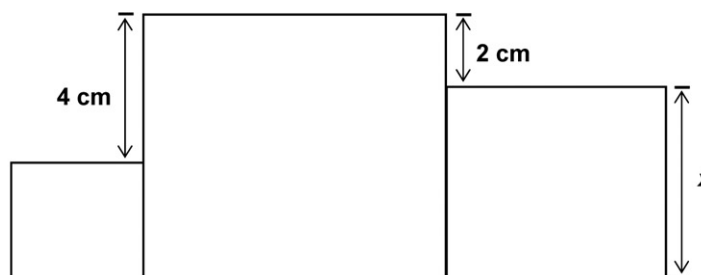
$$\text{Razão} = \frac{32\pi}{36\pi}$$

$$\text{Razão} = \frac{32}{108} \cong 0,296$$

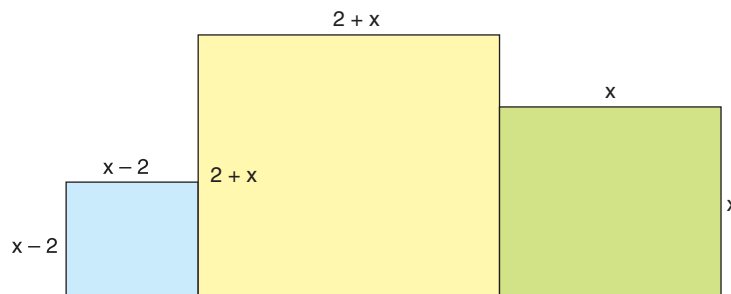
Portanto, 29,6 % aproximadamente

16 - A soma das áreas dos três quadrados ao lado é igual a 83 cm^2 . Qual é a área do quadrado maior?

- a) 36 cm^2
- b) 20 cm^2
- *c) 49 cm^2
- d) 42 cm^2
- e) 64 cm^2



Comentário:



$$\bullet (x - 2)^2 + (2 + x)^2 + x^2 = 83$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4 + 4x + x^2 + x^2 = 83$$

$$3x^2 = 75$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

• Quadrado maior

$$S = (2 + x)^2$$

$$S = (2 + 5)^2 \Rightarrow S = 49 \text{ cm}^2$$

Resposta: C

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2009/2010 - 1ª Fase

MATEMÁTICA

17 - Considere o polinômio $p(x) = x^3 - ax^2 + x - a$ e analise as seguintes afirmativas:

1. $i = \sqrt{-1}$ é uma raiz desse polinômio.
2. Qualquer que seja o valor de a , $p(x)$ é divisível por $x - a$.
3. Para que $p(-2) = -10$, o valor de a deve ser 0.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
- b) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
- c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
- d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
- *e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

Comentário:

- $p(x) = x^3 - ax^2 + x - a$
 $p(x) = x^2 \cdot (x - a) + (x - a)$
 $p(x) = (x - a) \cdot (x^2 + 1)$

1. Verdadeira

$$p(i) = (i - a) \cdot (i^2 + 1)$$

$$p(i) = (i - a) \cdot (-1 + 1) \Rightarrow p(i) = 0$$

2. Verdadeira

Pelo teorema do resto

$$R = p(a)$$

$$R = (a - a) \cdot (a^2 + 1) \Rightarrow R = 0 \text{ (é divisível)}$$

3. Verdadeira

$$p(-2) = -10$$

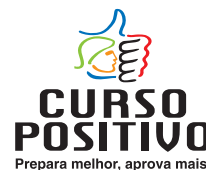
$$(-2 - a) \cdot [(-2)^2 + 1] = -10$$

$$(2 + a) \cdot 5 = 10$$

$$2 + a = 2 \Rightarrow a = 0$$

Resposta: E

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2009/2010 - 1ª Fase

MATEMÁTICA

18 - Um professor de Estatística costuma fazer duas avaliações por semestre e calcular a nota final fazendo a média aritmética entre as notas dessas duas avaliações. Porém, devido a um problema de falta de energia elétrica, a segunda prova foi interrompida antes do tempo previsto e vários alunos não conseguiram terminá-la. Como não havia possibilidade de refazer essa avaliação, o professor decidiu alterar os pesos das provas para não prejudicar os alunos. Assim que Amanda e Débora souberam da notícia, correram até o mural para ver suas notas e encontraram os seguintes valores:

Nome	1ª prova	2ª prova	Nota final da disciplina
Amanda	82	52	72,1
Débora	90	40	73,5

Qual foi o peso atribuído à segunda prova?

- a) 0,25
- b) 0,30
- *c) 0,33
- d) 0,35
- e) 0,40

Comentário:

Sejam x e y os pesos da primeira e segunda provas, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} \frac{82x+52y}{x+y} = 72,1 \\ \frac{90x+40y}{x+y} = 73,5 \end{cases} \sim \begin{cases} 9,9x = 20,1y \\ 16,5x = 33,5y \end{cases} \sim \begin{cases} 99x = 201y \text{ (I)} \\ 165x = 335y \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\text{(I) } 99x = 201y \rightarrow x = \frac{67y}{33}$$

$$\text{(II) } 165x = 335y \rightarrow x = \frac{67y}{33}$$

Assim, qualquer par da forma $\left(\frac{67y}{33}; y\right)$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ é solução do sistema. Portanto, todas as alternativas podem estar corretas.