PROVA GABARITADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

VESTIBULAR UFPR 2009 | 1ª FASE

CURSO POSITIVO
Prepara melhor. Aprova mais.

MATEMÁTICA

CURSO POSITIVO
Prepara melhor. Aprova mais.

COMENTÁRIO GERAL DOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

VESTIBULAR UFPR 2009 (1ª FASE)

PROVA DE MATEMÁTICA

A exemplo dos anos anteriores, a UFPR mantém a tradição de uma boa prova de Matemática. Mesmo com um número pequeno de questões que o atual modelo de vestibular disponibiliza para a disciplina, a comissão consegue distribuir os assuntos de maneira coerente, mantendo uma regular alternância de tópicos como trigonometria, matrizes e determinantes, equações exponenciais e outros.

Também é elogiável a forma com que a prova atende à natural tendência de contextualização das questões na atualidade. Ela é feita na medida certa, de forma inteligente, abordando situações verossímeis, e o mais importante, sem perder o foco, a essência, que é o programa de Matemática do Ensino Médio.

Ao contrário de muitos vestibulares que forçam situações absolutamente artificiais, ou atendem modismos de mesclar disciplinas a fórceps, num pretenso modernismo que afasta ainda mais os alunos de qualquer interesse pela disciplina, decorrente da perda do foco, a prova da UFPR é tecnicamente bem elaborada.

Uma prova que vai premiar com justiça os alunos que se dedicaram com seriedade.

Parabenizamos a Comissão.

01 - **Uma determinada região apresentou, nos últimos cinco meses, os seguintes valores (fornecidos em mm) para a precipitação pluviométrica média:**

jun	jul	ago	set	out
32	34	27	29	28

A média, a mediana e a variância do conjunto de valores acima são, respectivamente:

-) 30, 27 e 6,8.
-) 27, 30 e 2,4.
-) 30, 29 e 6,8.
-) 29, 30 e 7,0.
-) 30, 29 e 7,0.

Resposta correta: 30, 29 e 6,8.

COMENTÁRIO:

Sejam **Ma**, **Md** e **V** as medidas da média aritmética, da mediana e da variância do conjunto de valores, respectivamente.

A média aritmética é dada por:

$$Ma = \frac{32+34+27+29+28}{5}$$

$$Ma = \frac{150}{5} = 30 \text{ mm}$$

Em ordem crescente, o conjunto pode ser representado por:

(27, 28, **29**, 32, 34)

O termo médio dessa seqüência é a mediana.

Assim, Md = 29 mm.

A variância é a média dos quadrados das medidas dos desvios em relação à média aritmética:

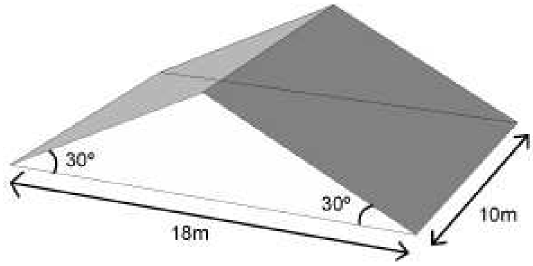
$$V = \frac{(32-30)^2+(34-30)^2+(27-30)^2+(29-30)^2+(28-30)^2}{5}$$

$$V = \frac{4+16+9+1+4}{5} = \frac{34}{5} = 6{,}8 \text{ mm}^2$$

02 - **A estrutura de um telhado tem a forma de um prisma triangular reto, conforme o esquema ao lado. Sabendo que são necessárias 20 telhas por metro quadrado para cobrir esse telhado, assinale a alternativa que mais se aproxima da quantidade de telhas necessárias para construí-lo.**

(use $\sqrt{3} = 1{,}7$)

-) 4080
-) 5712
-) 4896
-) 3670
-) 2856



Resposta correta: 4080

COMENTÁRIO

A base do prisma triangular é um triângulo isósceles de base igual a 18 m. Logo, a medida dos lados congruentes x pode ser obtida por meio de:

$$\cos 30^\circ = \frac{9}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{x} \rightarrow x = 6\sqrt{3} = 6 \,.\, 1{,}7 = 10{,}2 \text{ m}$$

A área do telhado é dada por:

$$S_T = 20 \,.\, 10{,}2 = 204 \text{ m}^2$$

Se 20 telhas cobrem 1 m^2, a quantidade de telhas necessária é dada por:

$$20 \,.\, 204 = 4\,080$$

03 - **Numa empresa de transportes, um encarregado recebe R$ 400,00 a mais que um carregador, porém cada encarregado recebe apenas 75% do salário de um supervisor de cargas. Sabendo que a empresa possui 2 supervisores de cargas, 6 encarregados e 40 carregadores e que a soma dos salários de todos esses funcionários é R$ 57.000,00, qual é o salário de um encarregado?**

-) R$ 2.000,00.
-) R$ 1.800,00.
-) R$ 1.500,00.
-) R$ 1.250,00.
-) R$ 1.100,00.

Resposta correta: R$ 1.500,00.

COMENTÁRIO:

Sendo E, C, S os salários, em reais, de um encarregado, de um carregador e de um supervisor, respectivamente, temos:

$$E = 400 + C \rightarrow C = E - 400 \text{ (I)}$$

$$E = \frac{3}{4}S \rightarrow S = \frac{4}{3}E \text{ (II)}$$

$$2S + 6E + 40C = 57\,000 \text{ (III)}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$2 \,.\left(\frac{4}{3}E\right) + 6E + 40 \,.\, (E - 400) = 57\,000$$

$$\frac{8}{3}E + 6E + 40E - 16\,000 = 57\,000$$

$$8E + 138E - 48\,000 = 171\,000$$

$$146E = 219\,000$$

$$E = 1500$$

Logo, o salário de um encarregado é igual a R$ 1.500,00.

04 - Em estudos realizados numa área de proteção ambiental, biólogos constataram que o número N de indivíduos de certa espécie primata está crescendo em função do tempo t (dado em anos), segundo a expressão

$$N(t) = \frac{600}{5 + 3 \times 2^{-0,1t}}$$

Supondo que o instante t = 0 corresponda ao início desse estudo e que essa expressão continue sendo válida com o passar dos anos, considere as seguintes afirmativas:

1. O número de primatas dessa espécie presentes na reserva no início do estudo era de 75 indivíduos.
2. Vinte anos após o início desse estudo, o número de primatas dessa espécie será superior a 110 indivíduos.
3. A população dessa espécie nunca ultrapassará 120 indivíduos.

Assinale a alternativa correta.

-) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
-) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
-) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

Resposta correta: Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

COMENTÁRIO:

1. **Verdadeiro.**

$$t = 0 \rightarrow N(0) = \frac{600}{5+3.2^{-0,1.0}} = \frac{600}{5+3.\,2^{0}} = \frac{600}{5+3.1} = \frac{600}{8} = 75$$

2. **Falso.**

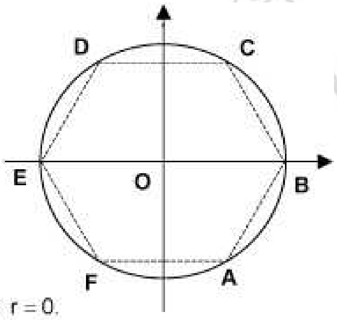
$$t = 20 \rightarrow N(20) = \frac{600}{5+3.\,2^{-0,1.\,20}} = \frac{600}{5+3.\,2^{-2}} = \frac{600}{5+\frac{3}{4}} = 600.\frac{4}{23} \cong 104 < 110$$

3. **Verdadeiro.**

A medida que o tempo aumenta, a expressão $2^{-0,1t} = \frac{1}{\sqrt[10]{2^t}}$ tende a diminuir. Logo, para um valor de t suficientemente grande, pode-se obter valores de $2^{-0,1t}$ tão pequenos quanto se queira. Portanto, o número máximo de primatas é obtido considerando-se $2^{-0,1t} \cong 0$:

$$N(t) = \frac{600}{5+3.2^{-0,1t}} \cong \frac{600}{5+3\,.\,0} = \frac{600}{5} = 120$$

05 - Considere o hexágono regular inscrito na circunferência de raio 2 centrada na origem do sistema de coordenadas cartesianas, conforme representado na figura ao lado. Nessas condições, é INCORRETO afirmar:



-) A equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 4$.
-) O triângulo com vértices nos pontos B, D e F é eqüilátero.
-) A distância entre os pontos A e D é 4.
-) A equação da reta que passa pelos pontos A e C pode ser escrita na forma $px + qy = r$, com $r = 0$.
-) A equação da reta que passa pelos pontos B e D pode ser escrita na forma $y = px + q$, com $p < 0$ e $0 < q < 2$.

Resposta correta: A equação da reta que passa pelos pontos A e C pode ser escrita na forma $px + qy = r$, com $r = 0$.

COMENTÁRIO

Na figura, pode-se observar que a reta que passa pelos pontos **A** e **C** não passa pela origem. Supondo **p** e **q** não simultaneamente nulos, a equação **px + qy = r**, com **r = 0**, passa necessariamente pela origem.

06 - Sabendo-se que $x = 2$ é um zero do polinômio $p(x) = 9x^3 - 21x^2 + 4x + 4$, é correto afirmar que a soma das outras duas raizes é igual a:

-) 1/3.
-) 3/7.
-) 1.
-) 4/21.
-) 4/9.

Resposta correta: 1/3.

COMENTÁRIO:

Sendo **2**, α e β as três raízes da equação, pela relação da soma das raízes (Girard), podemos escrever:

$$2 + \alpha + \beta = -\frac{(-21)}{9} = \frac{7}{3}$$

$$\alpha + \beta = \frac{7}{3} - 2$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{3}$$

07 - **Dados os números reais a, b e c diferentes de zero e a matriz quadrada de ordem 2**

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

considere as seguintes afirmativas a respeito de M:

1. **A matriz M é invertível.**
2. **Denotando a matriz transposta de M por M^T, teremos $\det(M.M^T) > 0$.**
3. **Quando $a = 1$ e $c = -1$, tem-se $M^2 = I$, sendo I a matriz identidade de ordem 2.**

Assinale a alternativa correta.

-) Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
-) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
-) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
-) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

Resposta correta: As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

COMENTÁRIO:

1. **Verdadeiro.**
   A matriz M é invertível se, e somente se, o respectivo determinante é diferente de zero:
   $\det(M) = a \,.\, c - b \,.\, 0 = a \,.\, c$
   Se a e c são números reais diferentes de zero, então $\det(M) \neq 0$.
   Logo, a matriz M é invertível.

2. **Verdadeiro.**
   $\det(M.M^T) = \det(M) \,.\, \det(M^T) = \det(M) \,.\, \det(M) = [\det(M)]^2 > 0$

3. **Verdadeiro.**
   Para $a = 1$ e $c = -1$, temos $M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, então:
   $M^2 = M \,.\, M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

08 - A linha de produção de uma fábrica produz milhares de peças por dia e apresenta, em média, quatro peças defeituosas a cada cem peças produzidas. Um inspetor de qualidade sorteia cinco peças de modo aleatório e verifica a quantidade de peças defeituosas. De acordo com as informações acima, considere as seguintes afirmativas:

1. A probabilidade de o inspetor encontrar no máximo uma peça defeituosa é $(0{,}04^0 \times 0{,}96^5) + (5 \times 0{,}04^1 \times 0{,}96^4)$.
2. A probabilidade de o inspetor encontrar pelo menos uma peça defeituosa é $1 - (0{,}04^0 \times 0{,}96^5)$.
3. É impossível o inspetor encontrar 5 peças defeituosas.

Assinale a alternativa correta.

-) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
-) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
-) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

Resposta correta: Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.

COMENTÁRIO:

Sejam p(D) e p(P) as probabilidades de uma peça ser defeituosa e perfeita, respectivamente. Se a cada cem peças produzidas, em média, quatro são defeituosas, então:

$$p(D) = \frac{4}{100} = 0{,}04$$

$$p(P) = \frac{96}{100} = 0{,}96$$

1. **Verdadeiro.** O inspetor encontrará no máximo uma peça defeituosa quando encontrar nenhuma ou apenas uma defeituosa.

- Probabilidade de nenhuma peça ser defeituosa:
  p(PPPPP) = 0,96 . 0,96 . 0,96 . 0,96 . 0,96
  p(nenhuma defeituosa) = $0{,}04^0 . 0{,}96^5$
- Probabilidade de somente a 1ª ser defeituosa:
  p(**D**PPPP) = 0,04 . 0,96 . 0,96 . 0,96 . 0,96 = $0{,}04^1 . 0{,}96^4$
- Probabilidade de somente a 2ª ser defeituosa:
  p(P**D**PPP) = $0{,}04^1 . 0{,}96^4$
- Probabilidade de somente a 3ª ser defeituosa:
  p(PP**D**PP) = $0{,}04^1 . 0{,}96^4$
- Probabilidade de somente a 4ª ser defeituosa:
  p(PPP**D**P) = $0{,}04^1 . 0{,}96^4$
- Probabilidade de somente a 5ª ser defeituosa:
  p(PPPP**D**) = $0{,}04^1 . 0{,}96^4$

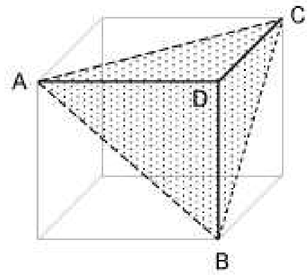
Assim, a probabilidade de somente uma ser defeituosa é dada por:
p(somente uma defeituosa) = $5 . 0{,}04^1 . 0{,}96^4$

Portanto, a probabilidade de, no máximo, uma ser defeituosa é dada por:
p(no máximo uma defeituosa) = $(0{,}04^0 . 0{,}96^5) + (5 . 0{,}04^1 . 0{,}96^4)$

2. **Verdadeiro.** A probabilidade de pelo menos uma ser defeituosa pode ser obtida subtraindo-se de 1 (100%), a probabilidade de nenhuma ser defeituosa:
p(pelos menos uma defeituosa) = 1 – p(nenhuma defeituosa)
p(pelos menos uma defeituosa) = 1 – 0,96 . 0,96 . 0,96 . 0,96 . 0,96
p(pelos menos uma defeituosa) = 1 – ($0{,}04^0 \cdot 0{,}96^5$)

3. **Falso.** A probabilidade de as 5 peças serem defeituosas é dada por:
p(DDDDD) = 0,04 . 0,04 . 0,04 . 0,04 . 0,04
p(5 defeituosas) = $0{,}04^5 \cdot 0{,}96^0$
Logo, esse evento não é impossível, pois a correspondente probabilidade é não-nula.
Observação:
O evento seria impossível no caso de a escolha das cinco peças ser executada sem reposição e num universo de 100 peças, das quais apenas 4 sejam defeituosas.

09 - Sabendo que a aresta do cubo ao lado mede 6 cm, considere as seguintes afirmativas:



1. A área do triângulo ACD é 9 cm².
2. O volume da pirâmide ABCD é 1/6 do volume do cubo.
3. A altura do triângulo ABC relativa a qualquer um dos lados mede $3\sqrt{2}$ cm.

Assinale a alternativa correta.

-) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
-) Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
-) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
-) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

Resposta correta: Somente a afirmativa 2 é verdadeira.

COMENTÁRIO:

1. **Falso.** O triângulo ACD é retângulo de base $\overline{AD}$ e altura $\overline{DC}$. Logo, a área é dada por:

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot DC}{2}$$

$$S_{ACD} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ cm^2$$

2. **Verdadeiro.** O triângulo ACD é base da pirâmide e a aresta $\overline{BD}$ é a altura. Logo, a área da base da pirâmide é igual à metade da área da base do cubo e a altura da pirâmide é igual à aresta do cubo. Logo, sendo **a** a medida da aresta do cubo, temos:

$$\frac{V_{pi}}{V_{cu}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h}{a^3} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} a}{a^3} = \frac{\frac{a^3}{6}}{a^3} = \frac{1}{6} \rightarrow V_{pi} = \frac{1}{6} V_{cu}$$

3. **Falso.** Os lados do triângulo ABC são diagonais das faces do cubo. Assim, o triângulo ABC é eqüilátero e a medida de cada lado é igual a $6\sqrt{2}$ cm. Logo, a altura, representada por **h**, é dada por:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}\ cm$$