MATEMÁTICA

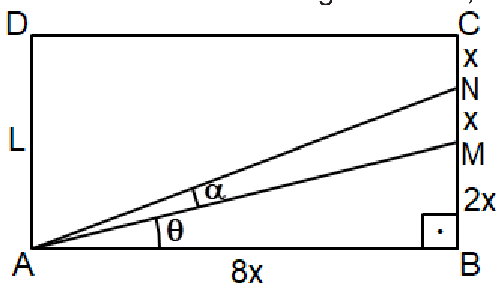
37. Considere um retângulo ABCD em que o comprimento do lado AB é o dobro do comprimento do lado BC. Sejam M o ponto médio de BC e N o ponto médio de CM. A tangente do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a

a) $\frac{1}{35}$. b) $\frac{2}{35}$. c) $\frac{4}{35}$. d) $\frac{8}{35}$. e) $\frac{16}{35}$.

Resposta: c

Resolução:

Sendo x a medida do segmento CN, temos a seguinte figura:



No triângulo retângulo ABM:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2x}{8x} = \frac{1}{4}$$

No triângulo retângulo ABN:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta) = \frac{3x}{8x} = \frac{3}{8}$$

Assim:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\theta} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{4}}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1}{4}} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{4 \cdot \operatorname{tg}\alpha + 1}{4 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{8} \Rightarrow 32 \cdot \operatorname{tg}\alpha + 8 = 12 - 3 \cdot \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{35}$$

Portanto, a tangente do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a $\frac{4}{35}$.

MATEMÁTICA

38. Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ um polinômio cujas raízes são não negativas e estão em progressão aritmética.

Sabendo que a soma de seus coeficientes é igual a 10, podemos afirmar que a soma das raízes de p(x) é igual a

a) 9. b) 8. c) 3. d) $\frac{9}{2}$. e) 10.

Resposta: a

Resolução:

Soma dos coeficientes

$$1 + a + b = 10 \Rightarrow b = 9 - a \quad (I)$$

Conforme relação de Girard:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a}{1}$$

$$\downarrow PA \to x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$$

$$2x_2 + x_2 = -a \Rightarrow x_2 = -\frac{a}{3}$$

Utilizando (I) e considerando que x_2 é raiz, temos:

$$P(x_2) = P\left(-\frac{a}{3}\right) = 0$$

$$\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + (9-a)\cdot\left(-\frac{a}{3}\right) = 0$$

$$2a^3 + 9a^2 - 81a = 0 \Leftrightarrow a\cdot(2a^2 + 9a - 81) = 0$$

$$a = 0$$

ou

$$a = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot 2\cdot(-81)}}{2\cdot 2} \to \begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ a = -9 \end{cases}$$

Como as raízes são não negativas, a soma não pode ser negativa. Pela primeira relação de Girard:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-9}{1} = 9$$

MATEMÁTICA

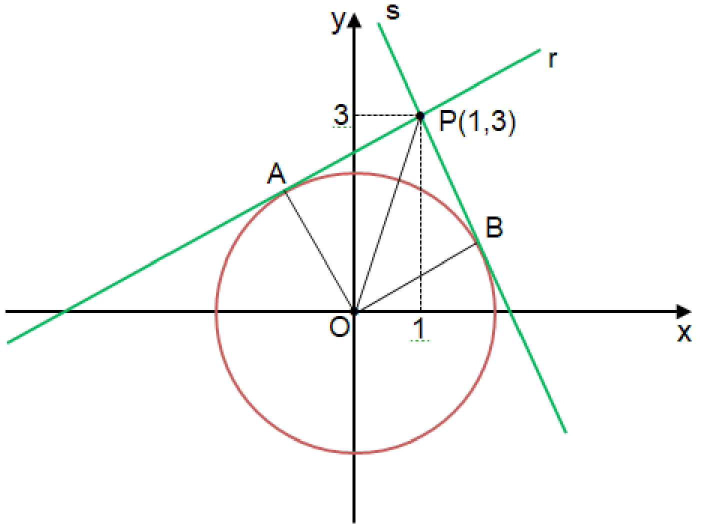
39. Seja γ a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Se r e s são duas retas que se interceptam no ponto $P = (1, 3)$ e são tangentes a γ, então o cosseno do ângulo entre r e s é igual a

a) $\frac{1}{5}$. b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. e) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Resposta: a

Resolução:

Conforme enunciado temos a seguinte representação no plano cartesiano, em que o raio da circunferência é 3 e as retas r e s são tangentes à circunferência nos pontos A e B:



Cálculo da distância de P à origem O:

$$d = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} \Rightarrow d = OP = \sqrt{10}$$

No triângulo retângulo OPA calculamos o seno do ângulo $O\hat{P}A$, isto é:

$$\text{sen}(O\hat{P}A) = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

Sendo $\text{med}(A\hat{P}B) = 2 \cdot \text{med}(O\hat{P}A)$ e utilizando a relação do arco duplo:

$$\cos(A\hat{P}B) = 1 - 2\text{sen}^2(O\hat{P}A)$$

$$\cos(A\hat{P}B) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 \Rightarrow \cos(A\hat{P}B) = \frac{1}{5}$$

MATEMÁTICA

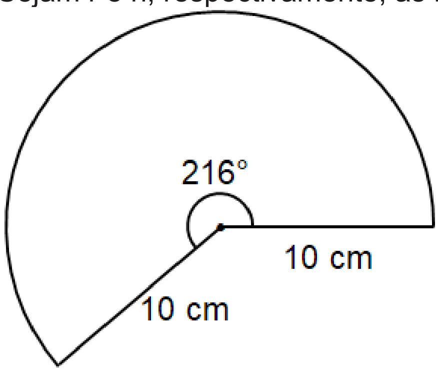
40. A superfície lateral de um cone circular reto corresponde a um setor circular de 216°, quando planificada. Se a geratriz do cone mede 10 cm, então a medida de sua altura, em cm, é igual a

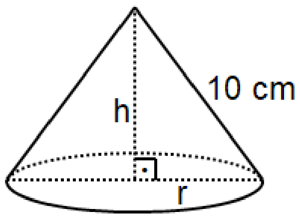
a) 5. b) 6. c) 7. d) 8. e) 9.

Resposta: d

Resolução:

Sejam r e h, respectivamente, as medidas do raio da base e da altura do cone.





Assim:

$$2\pi \cdot r = \frac{216}{360} \cdot 2\pi \cdot 10$$
$$r = 6 \text{ cm}$$

Assim:

$$10^2 = r^2 + h^2$$
$$h^2 = 10^2 - 6^2$$
$$h^2 = 64$$
$$h = 8 \text{ cm}$$

MATEMÁTICA

41. Assinale a opção que identifica o lugar geométrico de todos os pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que tornam impossível o sistema linear

$$S: \begin{cases} -x + 5y = 10 \\ \left(\dfrac{a^2}{5} + 5b^2\right)x + 10aby = 1 \end{cases}$$

a) Uma elipse
b) Uma reta
c) Uma parábola
d) Uma hipérbole
e) Um único ponto

Resposta: b

Resolução:

Determinante da matriz dos coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ \dfrac{a^2}{5} + 5b^2 & 10ab \end{vmatrix} = -10ab - a^2 - 25b^2$$

Para que o sistema seja impossível, devemos ter $D = 0$.

$$-10ab - a^2 - 25b^2 = 0 \Rightarrow (a + 5b)^2 = 0 \Rightarrow a = -5b$$

Assim:

$$S: \begin{cases} -x + 5y = 10 \\ \left(\dfrac{(-5b)^2}{5} + 5b^2\right)x + 10 \cdot (-5b) \cdot by = 1 \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} -x + 5y = 10 \\ 10b^2 \cdot x - 50b^2 \cdot y = 1 \end{cases} \Rightarrow S: \begin{cases} -x + 5y = 10 \\ -x + 5y = -\dfrac{1}{10b^2} \end{cases} \quad (b \neq 0)$$

Para $b \neq 0$, o sistema é impossível se $-\dfrac{1}{10b^2} \neq 10$, ou seja, se $b^2 \neq -\dfrac{1}{100}$. Essa condição é satisfeita para todo $b \in \mathbb{R}$.

Para $b = 0$, temos:

$$S: \begin{cases} -x + 5y = 10 \\ 10b^2 \cdot x - 50b^2 \cdot y = 1 \end{cases} \Rightarrow S: \begin{cases} -x + 5y = 10 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

O sistema é impossível.

Portanto, S é impossível para todos os pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $a = -5b$, ou seja, o lugar geométrico é uma reta.

MATEMÁTICA

42. Sabe-se que $-2+2i$ é uma das raízes quartas de um número complexo z. Então, no plano de Argand-Gauss, a área do triângulo, cujos vértices são as raízes cúbicas de z, é igual a

a) $4(\sqrt{3}\quad 1)$.
b) $6\sqrt{3}$.
c) $8(\sqrt{3}-1)$.
d) $10\sqrt{3}$.
e) $12\sqrt{3}$.

Resposta: e

Resolução:

A partir de $-2+2i$ vamos obter o número complexo z. Escrevendo $-2+2i$ na forma trigonométrica, temos:

$$-2+2i = 2\sqrt{2}\cdot(\cos 135° + i\cdot \text{sen}135°)$$

O número complexo z é a quarta potência de $-2+2i$

$$z = (2\sqrt{2})^4 \cdot [\cos(4\cdot 135°) + i\cdot \text{sen}(4\cdot 135°)]$$

$\downarrow$ 540° é côngruo de 180°

$$z = 64\cdot(\cos 180° + i\cdot \text{sen}180°)$$

Utilizando a fórmula de radiciação de complexos:

$$x_k = \sqrt[3]{64}\cdot\left[\cos\left(\frac{180°+k\cdot 360°}{3}\right) + i\cdot \text{sen}\left(\frac{180°+k\cdot 360°}{3}\right)\right]$$

$$x_0 = 4\cdot(\cos 60° + i\cdot \text{sen}60°) \Rightarrow x_0 = 2+2\sqrt{3}\,i \rightarrow A(2,\ 2\sqrt{3})$$

$$x_1 = 4\cdot(\cos 180° + i\cdot \text{sen}180°) \Rightarrow x_2 = -4 \rightarrow B(-4,\ 0)$$

$$x_2 = 4\cdot(\cos 300° + i\cdot \text{sen}300°) \Rightarrow x_3 = 2-2\sqrt{3}\,i \rightarrow C(2,\ -2\sqrt{3})$$

Os pontos A, B e C correspondem ao vértice de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio 2. A área do triângulo é:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{matrix}\right\|$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|0+8\sqrt{3}+4\sqrt{3}+8\sqrt{3}+0+4\sqrt{3}\right|$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 24\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = 12\sqrt{3}\ \text{u.a.}$$

MATEMÁTICA

43. Considere as seguintes afirmações:

I. se n é um número natural, então $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\quad+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$.

II. se x é um número real e $x^3+x+1=0$, então $x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^6}=0$.

III. se a, b e c são números reais positivos que formam, nessa ordem, uma progressão aritmética,

então $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

É(são) VERADEIRA(S)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) todas.

Resposta: c

Resolução:

I. Verdadeira

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+(\ldots)+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+(\ldots)+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+(\ldots)+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{2n}\geq n\cdot\frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+(\ldots)+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$$

II. Falsa

A equação dada do terceiro grau pode ser escrita na forma:

$$x^3+x+1=0\Rightarrow x^3+1=-x\ \ (\text{I})$$

A expressão correspondente ao 1º membro da segunda equação vamos representar por A e reescrevê-la:

$$A=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^6}$$

$$A=\frac{x^8+x^5+1}{x^6}=\frac{x^5\cdot(x^3+1)+1}{x^6}$$

$\downarrow$ Substituindo (I)

$$A=\frac{x^5\cdot(-x)+1}{x^6}=\frac{-x^6+1}{x^6}\Rightarrow A=-1+\frac{1}{x^6}$$

Como as raízes da primeira equação são diferentes de ±1 e x tem que verificar essa primeira equação, temos que:

$$A=-1+\frac{1}{x^6}\neq0\Rightarrow x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^6}\neq0$$

MATEMÁTICA

III. Verdadeira

Considerando a PA podemos escrever:

$a = b - r$ e $c = b + r$

Racionalizado as expressões dadas:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{-r} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{c-a} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{-r} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}$$

Observando que a segunda dessas expressões é média aritmética das outras duas, os três termos formam uma PA:

$$\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{r} \Rightarrow \frac{\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r} + \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}}{2} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2r}$$

MATEMÁTICA

44. As faces de dez moedas são numeradas de modo que: a primeira moeda tem faces 1 e 2; a segunda, 2 e 3; a terceira, 3 e 4, e assim sucessivamente até a décima moeda, com faces 10 e 11. As dez moedas são lançadas aleatoriamente e os números exibidos são somados. Então, a probabilidade de que essa soma seja igual a 60 é

a) $\frac{63}{128}$. b) $\frac{63}{256}$. c) $\frac{63}{512}$. d) $\frac{189}{512}$. e) $\frac{189}{1024}$.

Resposta: b

Resolução:

Para cada moeda, existem duas possibilidades para o resultado. Assim, o espaço amostral tem $2^{10} = 1024$ elementos.

Considerando os menores resultados possíveis em cada moeda, a soma é:

$$1+2+3+\ldots+10 = \frac{(1+10)\cdot 10}{2} = 55$$

Quando uma das moedas apresenta o maior valor, a soma é 56.
Quando duas das moedas apresenta o maior valor, a soma é 57.
Quando três das moedas apresenta o maior valor, a soma é 58, e assim, sucessivamente.

Quando 5 das 10 moedas apresenta o maior valor, a soma é 60. Isso pode ocorrer de $C_{10}^{5} = 252$ maneiras diferentes.

Portanto, a probabilidade de que a soma seja igual a 60 é $\frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$.

MATEMÁTICA

45. Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem $n \times n$ inversíveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. $|\det(A)| = 1$.

II. $A^T = A^{-1}$.

III. $A + A^{-1}$ é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRA(S)

a) apenas I. b) apenas III. c) apenas I e II.

d) apenas I e III. e) todas.

Resposta: a

Resolução:

I. Verdadeira

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

Como todos os elementos da matriz A e da sua inversa são números inteiros, então os seus determinantes também são números inteiros. Portanto, $\det A = \det A^{-1} = 1$ ou $\det A = \det A^{-1} = -1$, ou seja, $|\det(A)| = 1$.

II. Falsa

Considere, por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, cujo determinante é 1.

Assim, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Portanto, . $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \neq A^{-1}$

III. Falsa

Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, cujo determinante é –1.

Assim, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Portanto, $B + B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, que não é uma matriz diagonal.

MATEMÁTICA

46. Seja $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a função definida por $f(x) = \text{arcsen}(x)$. Então, a soma $\sum_{n=0}^{4} f\left(\cos\frac{2\pi}{3^n}\right)$ é igual a

a) $\frac{253}{162}\pi$. b) $\frac{245}{162}\pi$. c) $-\frac{152}{81}\pi$. d) $-\frac{82}{81}\pi$. e) $-\frac{79}{162}\pi$.

Resposta: b

Resolução:

Temos que obter a seguinte soma:

$$S = \text{arc sen}\left(\cos\frac{2\pi}{3^0}\right) + \text{arc sen}\left(\cos\frac{2\pi}{3^1}\right) + \text{arc sen}\left(\cos\frac{2\pi}{3^2}\right) + \text{arc sen}\left(\cos\frac{2\pi}{3^3}\right) + \text{arc sen}\left(\cos\frac{2\pi}{3^4}\right)$$

$$S = \text{arc sen}(\cos 2\pi) + \text{arc sen}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) + \text{arc sen}\left(\cos\frac{2\pi}{9}\right) + +\text{arc sen}\left(\cos\frac{2\pi}{27}\right) + \text{arc sen}\left(\cos\frac{2\pi}{81}\right)$$

↓ utilizando ângulos complementares

$$S = \text{arc sen}(1) + \text{arc sen}\left(-\frac{1}{2}\right) + \text{arc sen}\left(\text{sen}\frac{5\pi}{18}\right) + \text{arc sen}\left(\text{sen}\frac{23\pi}{54}\right) + \text{arc sen}\left(\text{sen}\frac{77\pi}{162}\right)$$

$$S = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{5\pi}{18} + \frac{23\pi}{54} + \frac{77\pi}{162}$$

$$S = \frac{245\pi}{162}$$

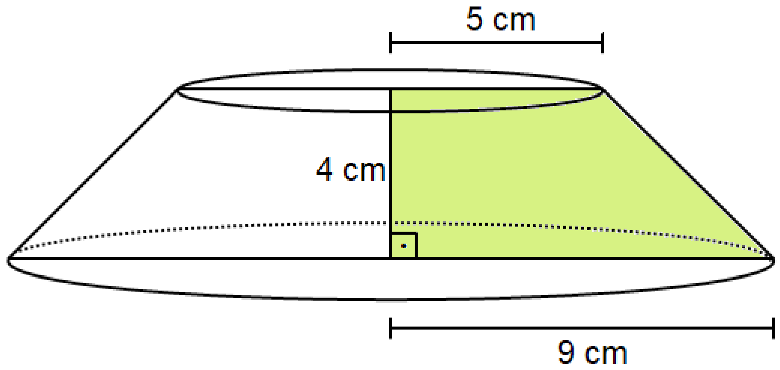
MATEMÁTICA

47. Os volumes de um tronco de cone, de uma esfera de raio 5 cm e de um cilindro de altura 11 cm formam nessa ordem uma progressão aritmética. O tronco de cone é obtido por rotação de um trapézio retângulo, de altura 4 cm e bases medindo 5 cm e 9 cm, em torno de uma reta passando pelo lado de menor medida. Então, o raio da base do cilindro é, em cm, igual a

a) $2\sqrt{2}$. b) $2\sqrt{3}$. c) 4. d) $2\sqrt{5}$. e) $2\sqrt{6}$.

Resposta: b

Resolução:



$$V_{\text{Tronco de cone}} = \frac{4}{3}\cdot(\pi\cdot 9^2 + \pi\cdot 5^2 + \pi\cdot 9\cdot 5) = \frac{604\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4\pi\cdot 5^3}{3} = \frac{500\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{Cilindro}} = \pi\cdot r^2\cdot 11 = 11\pi\cdot r^2\ \text{cm}^3$$

Assim:

$$\left(\frac{604\pi}{3}, \frac{500\pi}{3}, 11\pi\cdot r^2\right)\ \text{PA}$$

$$\frac{500\pi}{3} - \frac{604\pi}{3} = 11\pi\cdot r^2 - \frac{500\pi}{3}$$

$$11\pi\cdot r^2 = 132\pi$$

$$r^2 = 12 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

MATEMÁTICA

48. Considere as seguintes afirmações:

I. se x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$, então $y_1 = x_2x_3$, $y_2 = x_1x_3$ e $y_3 = x_1x_2$ são as raízes da equação $y^3 - y^2 - 4y - 4 = 0$.

II. a soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

III. $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas II e III.
e) todas.

Resposta: e

Resolução:

I. Verdadeira

Utilizando as relações de Girard para $x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -2 \end{cases}$$

Utilizando as relações de Girard para $y^3 - y^2 - 4y - 4 = 0$:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = -4 \\ y_1y_2y_3 = 4 \end{cases}$$

Substituindo as relações dadas:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = 1 \\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = x_2x_3x_1x_3 + x_2x_3x_1x_2 + x_1x_3x_1x_2 = x_2x_3x_1 \cdot (x_3 + x_2 + x_1) = 2 \cdot (-2) = -4 \\ y_1y_2y_3 = x_2x_3x_1x_3x_1x_2 = (x_2x_3x_1)^2 = (-2)^2 = 4 \end{cases}$$

II. Verdadeira

Considerando $3n-1$, 3n e $3n+1$ como os três números inteiros e consecutivos:

$$(3n-1)^3 + (3n)^3 + (3n+1)^3 = 27n^3 - 27n^2 + 9n - 1 + 27n^3 + 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1$$

$$(3n-1)^3 + (3n)^3 + (3n+1)^3 = 81n^3 + 18n = 9 \cdot (9n^2 + 2)$$

Portanto, múltiplo de 9.

III. Verdadeira

Vamos elevar ao quadrado o segundo membro da igualdade:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto:

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$