COMENTÁRIO DA PROVA

Como já era esperado, a prova de Matemática apresentou um bom número de questões com grau relativamente alto de dificuldade, nas quais a característica fundamental foi a mescla de dois ou mais temas em uma mesma questão. Isto premia o aluno que sabe relacionar diferentes tópicos matemáticos, mesmo que, não raro, cada um deles tenha sido solicitado de modo imediato. Assim, embora não tenha apresentado qualquer questão incomum, acreditamos que a prova vai, realmente, selecionar os candidatos mais bem preparados.

Professores de Matemática do Curso Positivo

01) Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

III. $\ell n\sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2).(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

a) nenhuma.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) I, II e III.

Resolução:

I. Verdadeira

Se um número é racional, então a correspondente expansão decimal é finita ou é infinita e periódica.

II. Falsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right).\sqrt{2^n}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)}.\left(\frac{1}{\sqrt{2^0}}+\frac{1}{\sqrt{2^1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2}}+\dots\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)}.\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2^1}}}\right) = \sqrt{2}$$

III. Verdadeira

$$\ell n\sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2).(\log_4 9) = \log_e e^{\frac{2}{3}} + (\log_3 2).\left(\frac{\log_3 9}{\log_3 4}\right) = \frac{2}{3}+1 = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$$

Gabarito: D

02) Sejam A, B e C os subconjuntos de C definidos por $A = \{z \in C : |z + 2 - 3i| < \sqrt{19}\}$, B = {z ∈ C: |z + i| < 7/2} e C = {z ∈ C : z^2 + 6z + 10 = 0}. Então, (A \ B) ∩ C é o conjunto:

a) {–1 – 3i, –1 + 3i}

a) {–3 – i, –3 + i}

c) {–3 + i}

d) {–3 – i}

e) {–1 + 3i}

Resolução:

C = {z ∈ C: z^2 + 6z + 10 = 0}

$z^2 + 6z + 10 = 0$

$z^2 + 6z + 9 = -1$

$(z + 3)^2 = -1$

$z + 3 = \pm i$

$z = -3 \pm i$

Logo, C = {-3 + i; -3 – i}.

Observe que (-3 + i) ∈ A, pois |(-3 + i) + (2 – 3i)| = |-1 – 2i| = $\sqrt{5} < \sqrt{19}$.

Por outro lado, (-3 + i) ∉ B, pois |(-3 + i) + i| = |-3 + 2i| = $\sqrt{13} > \dfrac{7}{2}$.

Assim, (-3 + i) ∈ (A \ B) ∩ C.

Entretanto, (-3 – i) ∉ (A \ B) ∩ C, pois (-3 – i) ∈ B.

Portanto, (A \ B) ∩ C = { -3 + i }.

Gabarito: C

03) Se $z = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ **, então o valor de 2 arcsen(Re(z)) + 5 arctg(2 Im(z)) é igual a:**

a) $-\dfrac{2\pi}{3}$

b) $-\dfrac{\pi}{3}$

c) $\dfrac{2\pi}{3}$

d) $\dfrac{4\pi}{3}$

e) $\dfrac{5\pi}{3}$

Resolução:

$$z = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$$

$$z = \left[\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)}{\left(1-\sqrt{3}i\right)} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)}{\left(1+\sqrt{3}i\right)}\right]^{10}$$

$$z = \left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]^{10}$$

$$z = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,.\,sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}$$

$$z = \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right)+i\,.\,sen\left(\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,.\,sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \;\; e \;\; \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, tem-se:

$$2\,.\,arc\ sen(\operatorname{Re}(z)) = 2\,.\,arc\ sen\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\,.\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$5\,.\,arc\ tg(2\,.\operatorname{Im}(z)) = 5\,.\,arc\ tg\left(2\,.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5\,.\,arc\ tg\left(\sqrt{3}\right) = 5\,.\frac{\pi}{3}$$

Portanto:

$$2\,.\,arc\ sen(\operatorname{Re}(z)) + 5\,.\,arc\ tg(2\,.\operatorname{Im}(z)) = -\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Gabarito: D

04) Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas r: 3x + 4y – 4 = 0 e s: 3x + 4y – 19 = 0, A área do círculo determinado por C é igual a:

a) $\frac{5\pi}{7}$

b) $\frac{4\pi}{5}$

c) $\frac{3\pi}{2}$

d) $\frac{8\pi}{3}$

e) $\frac{9\pi}{4}$

Resolução:

As retas r e s são paralelas, pois apresentam os mesmos coeficientes angulares. Assim, a distância entre as retas é o diâmetro da circunferência. Logo:

$$2R = \frac{|(-4)-(-19)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$R = \frac{3}{2}$$

A área do círculo determinado por C é dada por:

$$S = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$S = \frac{9\pi}{4}$$

Gabarito: E

05) Seja (a_1, a_2, a_3, ...) a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2} , que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.
II. a_7 é um número primo.
III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

a) apenas II.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

Resolução:

I. Falsa

Se (a_p, a_{p+1}, a_{p+2}) formam, nesta ordem uma P.G., então:

$$(a_{p+1})^2 = (a_p).\,(a_{p+2})$$

Mas, $a_{p+1} = a_{p+2} - a_p$, então:

$$(a_{p+2} - a_p)^2 = (a_p).\,(a_{p+2})$$

$$(a_{p+2})^2 - 3\,.\,(a_{p+2})\,.\,(a_p) + (a_p)^2 = 0$$

$$a_{p+2} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right).\,a_p$$

$$\frac{a_{p+2}}{a_p} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$, pois $a_{p+2} > a_p$

Como a_{p+2} e a_p são necessariamente números inteiros positivos, o quociente não pode ser um número irracional. Logo, não existem três termos consecutivos que estejam em progressão geométrica.

II. Verdadeira

A sequência apresentada é a de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...).

Logo, $a_7 = 13$ e 13 é um número primo.

III. Verdadeira

Seja k um número natural não nulo. Os termos da forma a_{3k-2} são ímpares. Os termos da forma a_{3k-1} são ímpares. Como $a_{3k} = a_{3k-1} + a_{3k-2}$, os termos da forma a_{3k} , com k natural não nulo, são pares.

Gabarito: D

06) Considere a equação $\frac{a}{1-x^2}-\frac{b}{x-\frac{1}{2}}=5$**, com a e b números inteiros positivos.**

Das afirmações:

I. Se a = 1 e b = 2, então x = 0 é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -1$ e $x \neq 1$.

III. $x = \frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

a) É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Resolução:

$$\frac{a}{1-x^2}-\frac{b}{x-\frac{1}{2}}=5$$

$$\frac{a}{1-x^2}-\frac{2b}{2x-1}=5$$

$$a\,.\,(2x-1)-2b\,.\,(1-x^2)=5\,.\,(2x-1)\,.\,(1-x^2)$$

$2ax - a - 2b + 2bx^2 = 5 \,.\, (2x - 2x^3 - 1 + x^2)$

$2ax - a - 2b + 2bx^2 = 10x - 10x^3 - 5 + 5x^2$

$10 \,.\, x^3 + (2b - 5) \,.\, x^2 + (2a - 10) \,.\, x + (5 - a - 2b) = 0$

I. Verdadeira

Se a = 1 e b = 2, então:

$10x^3 - x^2 - 8x = 0$

$x \,.\, (8x^2 - x - 8) = 0$

$x = 0$ ou $8x^2 - x - 8 = 0$

Logo, x = 0 é uma solução da equação.

II. Verdadeira

Devido às condições de existência dos termos da equação, temos $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -1 \, e \, x \neq 1$.

III. Verdadeira

Se $x = \frac{2}{3}$, então:

$$a \, . \left(2 \, . \frac{2}{3} - 1 \right) - 2b \, . \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = 5 \, . \left(2 \, . \frac{2}{3} - 1 \right) . \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]$$

$$\frac{a}{3} - \frac{10}{9} b = \frac{25}{27}$$

$$9a - 30b = 25$$

$$3.(3a - 10b) = 25$$

Como a e b são números inteiros positivos, necessariamente, 3 . (3a – 10b) é um número múltiplo de 3. Porém, 25 não é múltiplo de 3, de modo que $x = \frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

Gabarito: E

07) Considere o polinômio p dado por $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$, com $a, b \in IR$. Sabendo-se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de p, então o valor de $b - a$ é igual a:

a) -36

b) -12

c) 66

d) 12

e) 24

Resolução:

Se 2 fosse a raiz dupla, pela relação de Girard do produto das raízes, a outra raiz seria também igual a 2, ou seja, 2 seria raiz tripla. Logo, 2 não pode ser raiz dupla. Desta forma, sejam 2, α e α as raízes de p. Pelo produto das raízes, temos:

$$2 \cdot \alpha \cdot \alpha = 8$$

$$\alpha^2 = 4$$

$$\alpha = \pm 2$$

Como 2 é raiz dupla, necessariamente, $\alpha = -2$.

Assim, $p(x) = 2 \cdot (x + 2)^2 \cdot (x - 2)$.

$$p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16$$

Desta forma, $a = 4$ e $b = -8$, ou seja, $b - a = -8 - 4 = -12$

Gabarito: B

08) Seja p o polinômio dado por $p(x)=\sum_{j=0}^{15} a_j x^j$ **, com $a_j \in$ IR, j = 0, 1, ..., 15, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que i é uma raiz de p e que p(2) = 1, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por q(x) = $x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a**

a) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$

Resolução:

Observe que q(x) = (x – 2) . (x^2 + 1). Assim, se o divisor possui grau 3, o grau máximo do resto é 2, ou seja, o resto é da forma R(x) = ax^2 + bx + c. Logo:

p(x) = (x – 2) . (x^2 + 1) . M(x) + ax^2 + bx + c, em que M(x) é o quociente

p(2) = 4a + 2b + c = 1 (I)

p(i) = -a + bi + c = 0 (II)

p(-i) = -a – bi + c = 0 (III)

De (II), tem-se:

(c – a) + bi = 0 + 0i

c = a e b = 0

Substituindo e (I), tem-se:

4a + 2 . 0 + a = 1

5a = 1

$$a = \frac{1}{5} \rightarrow c = \frac{1}{5}.$$

Portanto, $R(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

Gabarito: B

09) Considere todos os triângulos retângulos com lados medindo $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ e a. Dentre esses triângulos, o de maior hipotenusa tem seu menor ângulo, em radianos, igual a:

a) $arctg\,\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $arctg\,\frac{1}{2}$

d) $arctg\,\frac{3}{5}$

e) $arctg\,\frac{4}{5}$

Resolução:

Como $2\sqrt{a} > \sqrt{a}$, pois a > 0, a hipotenusa pode ter medida $2\sqrt{a}$ ou a.

Se a hipotenusa tiver medida $2\sqrt{a}$, por Pitágoras, temos:

$$\left(2\sqrt{a}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + a^2$$

$4a = a + a^2$

a . (a – 3) = 0

a = 3 ou a = 0 (não convém)

Neste caso, os lados do triângulo mediriam $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ e 3.

Se a hipotenusa tiver medida a, por Pitágoras, temos:

$$a^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(2\sqrt{a}\right)^2$$

$a^2 = a + 4a$

a . (a – 5) = 0

a = 5 ou a = 0 (não convém)

Neste caso, os lados do triângulo teriam medidas 5, $2\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$.

Como $5 > 2\sqrt{3}$, o triângulo de maior hipotenusa possui um menor ângulo α, tal que:

$$tg(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Gabarito: C

10) Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2\text{sen}(x) - \cos(x) = 1$ são:

a) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right) \; e \; \pi$

b) $arcsen\left(\frac{3}{5}\right) \; e \; \pi$

c) $arcsen\left(-\frac{4}{5}\right) \; e \; \pi$

d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) \; e \; \pi$

e) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right) \; e \; \pi$

Resolução:

$2\text{sen}(x) - \cos(x) = 1$

$2\text{sen}(x) - 1 = \cos(x)$

$[2\text{sen}(x) - 1]^2 = \cos^2(x)$

$4\text{sen}^2(x) - 4 \cdot \text{sen}(x) + 1 = 1 - \text{sen}^2(x)$

$5\text{sen}^2(x) - 4 \cdot \text{sen}(x) = 0$

$$sen(x) = 0 \; ou \; sen(x) = \frac{4}{5}$$

Se sen(x) = 0, então cos(x) = -1, ou seja, $x = \pi$.

Se $sen(x) = \frac{4}{5}$, então $\cos(x) = \frac{3}{5}$.

Portanto, os valores de x são $\arccos\left(\frac{3}{5}\right) \; ou \; \pi$.

Gabarito: A

11) Sejam α e β números reais tais que α, β, α + β ∈]0 , 2π[e satisfazem as equações $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}\cos^4\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{5}$ **e** $\cos^2\frac{\beta}{3}=\frac{4}{7}\cos^4\frac{\beta}{3}+\frac{3}{7}$**. Então, o menor valor de cos(α + β) é igual a**

a) −1.

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $-\frac{1}{2}$.

e) 0 .

Resolução:

Fazendo $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=x$ e $\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)=y$, temos:

$$x=\frac{4}{5}x^2+\frac{1}{5} \text{ e } y=\frac{4}{7}y^2+\frac{3}{7}$$

$4x^2 - 5x + 1 = 0$ e $4y^2 - 7y + 3 = 0$

$$4.(x-1).\left(x-\frac{1}{4}\right)=0 \text{ e } 4.(y-1).\left(y-\frac{3}{4}\right)=0$$

$$x=1 \; ou \; x=\frac{1}{4} \text{ e } y=1 \; ou \; y=\frac{3}{4}$$

Logo:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1 \; ou \; \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{4} \text{ e } \cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)=1 \; ou \; \cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)=\frac{3}{4}$$

Observando que $\cos(\theta)=2.\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1$, temos:

$$\cos(\alpha)=2.\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1=2.1-1=1 \text{ (não convém, pois } \alpha \in]0 , 2\pi[)$$

$$\cos(\alpha)=2.\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1=2.\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}\rightarrow \alpha=\frac{2\pi}{3} \; ou \; \alpha=\frac{4\pi}{3}$$

Além disso:

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)=1\rightarrow \cos\left(\frac{\beta}{3}\right)=1 \; ou \; \cos\left(\frac{\beta}{3}\right)=-1$$

ou

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)=\frac{3}{4}\rightarrow\cos\left(\frac{\beta}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ou\ \cos\left(\frac{\beta}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Observe que, se:

$$0<\beta<2\pi\rightarrow 0<\frac{\beta}{3}<\frac{2\pi}{3}\rightarrow-\frac{1}{2}<\cos\left(\frac{\beta}{3}\right)<1$$

Desta forma, conclui-se que:

$$\cos\left(\frac{\beta}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\frac{\beta}{3}=\frac{\pi}{6}\rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}$$

Portanto, existem dois pares possíveis:

$$\alpha=\frac{2\pi}{3}\ e\ \beta=\frac{\pi}{2}\ ou\ \alpha=\frac{4\pi}{3}\ e\ \beta=\frac{\pi}{2}$$

Assim, existem dois valores possíveis para cos(α + β):

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ou

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

O menor valor é $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gabarito: B

12) Seja A = $(a_{ij})_{5x5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1} \cdot (2j-1)$, $1 \leq i, j \leq 5$. Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i.

II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.

III. tr A é um número primo.

É (são) verdadeira(s)
a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas II e III.
d) apenas I e III.
e) I, II e III.

Resolução:

A matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 \\ 4 & 12 & 20 & 28 & 36 \\ 8 & 24 & 40 & 56 & 72 \\ 16 & 48 & 80 & 112 & 144 \end{bmatrix}$$

I. Verdadeira

A primeira linha é uma P.A. de razão 2. A segunda linha é uma P.A. de razão 4. A terceira linha é uma P.A. de razão 8. A quarta linha é uma P.A. de razão 16. A quinta linha é uma P.A. de razão 32.

II. Verdadeira

Todas as colunas formam progressões geométricas de razão 2.

III. Verdadeira

tr(A) = 1 + 6 + 20 + 56 + 144 = 227 que é um número primo.

Gabarito: E

13) Considere a matriz M = $(m_{ij})_{2x2}$ tal que m_{ij} = j – i + 1, i, j = 1, 2. Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\,.\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = 252$$ **, então o valor de n é igual a:**

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

Resolução:

A matriz M é dada por:

$$M = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Por indução, pode-se provar que:

$$M^k = \begin{bmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$, para todo k natural não nulo

Logo:

$$\sum_{k=1}^{n} M^k = M^1 + M^2 + M^3 + \ldots + M^n$$

$$\sum_{k=1}^{n} M^k = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M^k = \begin{bmatrix}n & (n+1).n\\ 0 & n\end{bmatrix}$$

Além disso, temos:

$$\sum_{k=1}^{n} M^k - n\,.\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n & (n+1).n\\ 0 & n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}n & 0\\ n & n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & (n+1).n\\ -n & 0\end{bmatrix}$$

Se $\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^{k} - n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 252$, então:

$n^2 \cdot (n + 1) = 252$

$n^3 + n^2 - 252 = 0$

$(n - 6) \cdot (n^2 + 7n + 42) = 0$

Como n é inteiro e positivo, conclui-se que n = 6.

Gabarito: C

14) Considere os pontos $A = (0,-1)$, $B = (0,5)$ e a reta $r : 2x - 3y + 6 = 0$.
Das afirmações a seguir:

I. $d(A,r) = d(B,r)$.
II. B é simétrico de A em relação à reta r.
III. $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero *ABC*, de vértice $C = \left(-3\sqrt{3},\, 2\right)$ ou $C = \left(3\sqrt{3},\, 2\right)$.

É (são) verdadeira(s) apenas:
a) I.
b) II.
c) I e II.
d) I e III.
e) II e III.

Resolução:

I. Verdadeira

$$d(A, r) = \frac{\left|2\,.\,0 - 3\,.\,(-1) + 6\right|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

$$d(B, r) = \frac{\left|2\,.\,0 - 3\,.\,5 + 6\right|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

$$d(A, r) = d(B, r)$$

II. Falsa

O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A e B é dado por:

$$m_{AB} = \frac{5 - (-1)}{0 - 0} = \frac{6}{0}$$

Logo, a reta que passa por A e B é vertical e, portanto, não possui coeficiente angular.

Como a reta r não é horizontal, pois o correspondente coeficiente angular é diferente de zero, conclui-se que B não é simétrico de A em relação à reta r.

III. Verdadeira

Se os pontos A e B são vértices de um triâgulo equilátero e pertencem ao eixo das ordenadas, então o lado do triângulo mede 5 – (–1) = 6 e a abscissa da altura é dada por:

$$|h| = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \rightarrow |h| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \rightarrow h = \pm 3\sqrt{3}$$

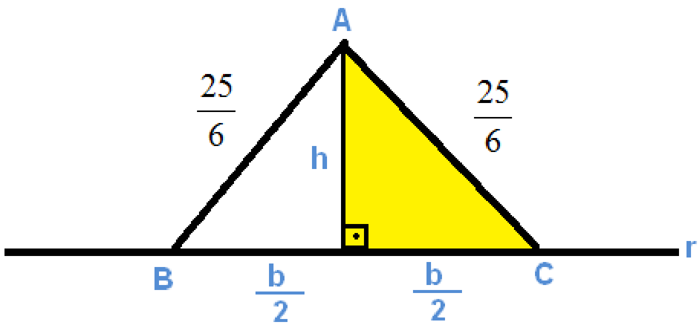
O ponto médio da base tem abscissa dada por $y_C = \frac{-1+5}{2} = 2$. Portanto, $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero *ABC*, de vértice $C = \left(-3\sqrt{3},\, 2\right)$ ou $C = \left(3\sqrt{3},\, 2\right)$.

Gabarito: D

15) Dados o ponto $A = \left(4, \frac{25}{6}\right)$ e a reta r: 3x + 4y – 12 = 0, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em r e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\frac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente, iguais a

a) 22/3 e 40/3
b) 23/3 e 40/3
c) 25/3 e 3/3
d) 25/3 e 35/3
e) 25/3 e 40/3

Resolução:



A distância de A até r é igual à altura do triângulo relativa ao vértice A:

$$h = \frac{\left|3.4 + 4.\frac{25}{6} - 12\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{3}$$

Aplicando Pitágoras no triângulo em destaque, temos:

$$\left(\frac{25}{6}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\frac{625}{36} - \frac{100}{9} = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$b = 5$$

Área do triângulo ABC:

$$S = \frac{1}{2}.5.\frac{10}{3} = \frac{25}{3}$$

Perímetro do triângulo ABC:

$$2p = \frac{25}{6} + \frac{25}{6} + 5 = \frac{40}{3}$$

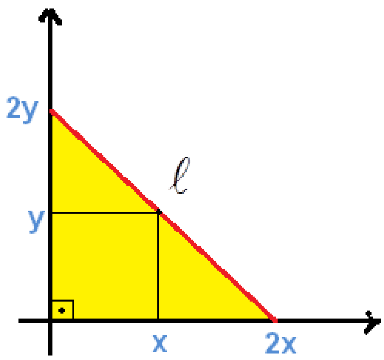
Gabarito: E

16) Considere as afirmações a seguir:

I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento ℓ fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.
II. O lugar geométrico dos pontos (x,y) tais que $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$ é um conjunto finito no plano cartesiano IR^2.
III. Os pontos (2,3), (4, -1) e (3,1) pertencem a uma circunferência.
Destas, é (são) verdadeira(s)
a) Apenas I
b) Apenas II
c) Apenas III
d) I e II
e) I e III.

Resolução:

I. Verdadeira



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, temos:

$$(2x)^2 + (2y)^2 = \ell^2$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

O lugar geométrico é uma circunferência de centro (0,0) e raio $\frac{\ell}{2}$.

II. Falsa

$6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$

$x \cdot (2x + y) \cdot (3x - y - 2) = 0$

$x = 0$ ou $2x + y = 0$ ou $3x - y - 2 = 0$

O lugar geométrico corresponde a três retas no plano cartesiano. Como existem infinitos pontos em cada uma, o conjunto é infinito.

III. Falsa

Três pontos no plano cartesiano só não pertencem a uma circunferência quando estão alinhados. Logo, para verificar se os três pontos pertencem a uma mesma circunferência, podemos calcular o coeficiente angular as retas que passam por dois desses pontos:

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-3}{4-2} = -2$$

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{3-2} = -2$$

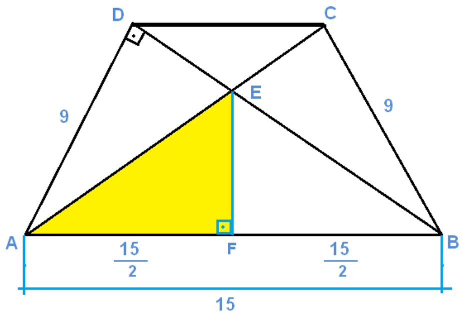
Os coeficientes angulares iguais indicam que os pontos estão alinhados. Portanto, os pontos (2,3), (4, -1) e (3,1) não pertencem a uma circunferência.

Gabarito: A

17) Seja *ABCD* um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto *E* em que as diagonais se cortam é:

a) 21/8
b) 27/8
c) 35/8
d) 37/8
e) 45/8

Resolução:



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD, temos:

$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$

$15^2 = 9^2 + (BD)^2$

$BD = 12$

Pelo fato de o trapézio ABCD ser isósceles, observa-se que:

BD = AC = 12, AE = BE e DE = CE.

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADE, temos:

$(AE)^2 = (AD)^2 + (DE)^2$

$(AE)^2 = (AD)^2 + (BD – BE)^2$

$(AE)^2 = (AD)^2 + (BD – AE)^2$

$(AE)^2 = 9^2 + (12 – AE)^2$

$(AE)^2 = 81 + 144 – 24 . (AE) + (AE)^2$

$24 . (AE) = 225$

$$AE = \frac{225}{24}$$

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AEF, temos:

$(AE)^2 = (AF)^2 + (EF)^2$

$$\left(\frac{225}{24}\right)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + (EF)^2$$

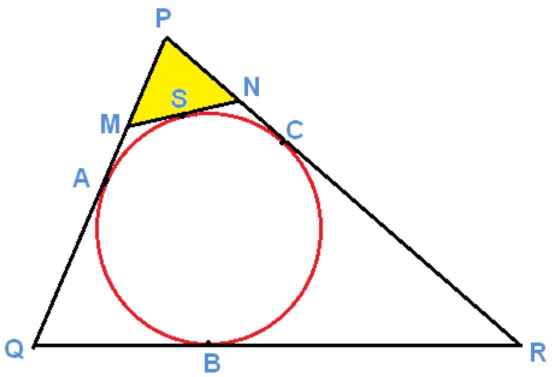
$$EF = \frac{45}{8}$$

Gabarito: E

18) Num triângulo *PQR* , considere os pontos *M* e *N* pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo *PQR* . Sabendo-se que o perímetro do triângulo *PQR* é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo *PMN* é igual a:

a) 5.
b) 6.
c) 8.
d) 10.
e) 15.

Resolução:



Pela propriedade geométrica das tangentes a uma circunferência determinadas por um ponto exterior, temos:

MA = MS, NC = NS, QA = QB e RB = RC

Se QR = 10, então QB + RB = 10 ou QB + QA + RB + RC = 20.

Se o perímetro do triângulo PQR é igual a 25, então:

QB + QA + RB + RC + PM + MA + PN + NC = 25

20 + PM + MS + PN + NS = 25

PM + (MS + NS) + PN = 25 – 20

PM + MN + PN = 5

Logo, o perímetro do triângulo PMN é igual a 5.

Gabarito: A

19) Considere uma circunferência *C*, no primeiro quadrante, tangente ao eixo O*x* e à reta *r* : *x* − *y* = 0 . Sabendo-se que a potência do ponto *O* = (0,0) em relação a essa circunferência é igual a 4, então o centro e o raio de *C* são, respectivamente, iguais a:

a) $\left(2,\ 2\sqrt{2}-2\right)$ e $2\sqrt{2}-2$

b) $\left(2,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}$

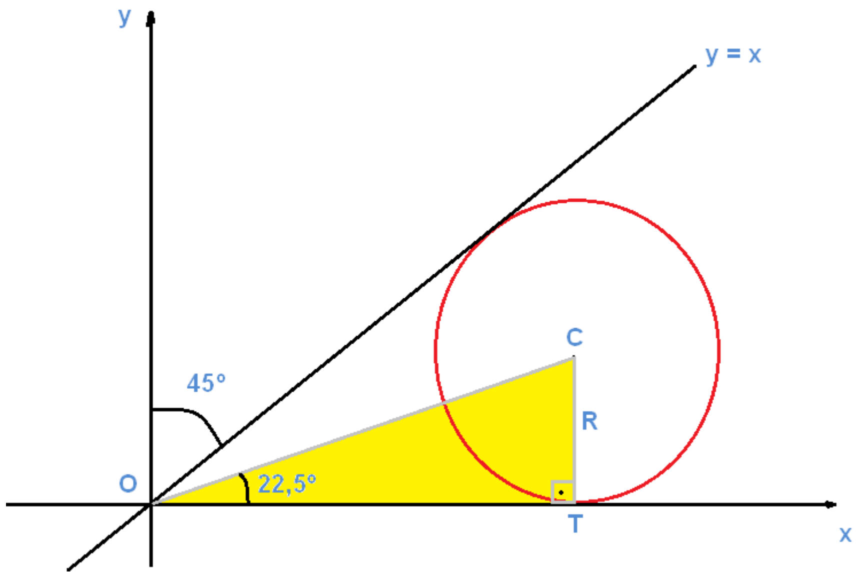
c) $\left(2,\ \sqrt{2}-1\right)$ e $\sqrt{2}-1$

d) $\left(2,\ 2-\sqrt{2}\right)$ e $2-\sqrt{2}$

e) $\left(2,\ 4\sqrt{2}-4\right)$ e $4\sqrt{2}-4$

Resolução:

Observe a ilustração:



Se a potência do ponto O em relação à circunferência é igual a 4, então:

$(OT)^2 = 4 \rightarrow OT = 2$

Do triângulo retângulo OCT, temos:

$$tg\left(22{,}5^\circ\right) = \frac{CT}{OT} = \frac{R}{2} \rightarrow R = 2\,.\,tg\left(22{,}5^\circ\right)$$

Observando que $tg(2\alpha) = \dfrac{2tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)}$ e fazendo α = 22,5º, temos:

$$tg(45^\circ) = \frac{2tg(22{,}5^\circ)}{1 - tg^2(22{,}5^\circ)}$$

$$tg^2(22{,}5^\circ) + 2tg(22{,}5^\circ) - 1 = 0$$

$$tg(22{,}5^\circ) = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(22{,}5^\circ) > 0 \rightarrow tg(22{,}5^\circ) = \sqrt{2} - 1$$

Desta forma:

$$R = 2\sqrt{2} - 2$$

E as coordenadas do centro são $(2,\ 2\sqrt{2} - 2)$.

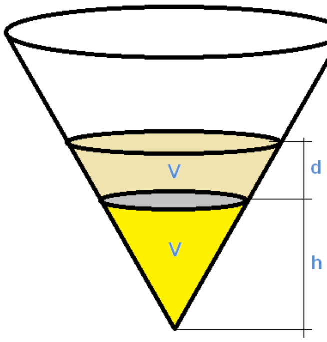
Gabarito: A

20) Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de:

a) $\sqrt[3]{2} - h$
b) $\sqrt[3]{2} - 1$
c) $\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)h$
d) h
e) $\dfrac{h}{2}$

Resolução:

Observe a ilustração:



Relacionando os volumes dos dois cones com as respecticas alturas, temos:

$$\left(\frac{d+h}{h}\right)^3 = \frac{2V}{V}$$

$$\left(\frac{d}{h}+1\right)^3 = 2$$

$$\frac{d}{h}+1 = \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{d}{h} = \sqrt[3]{2}-1$$

$$d = \left(\sqrt[3]{2}-1\right).\,h$$

Gabarito: C

21) Considere as funções f_1, f_2, f : IR → IR, sendo $f_1(x)=\frac{1}{2}.|x|+3$, $f_2(x)=\frac{3}{2}.|x+1|$ e $f(x)$ igual ao maior valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para cada x ∈ IR. Determine:

a) Todos os $x \in$ IR tais que $f_1(x) = f_2(x)$.
b) O menor valor assumido pela função f.
c) Todas as soluções da equação $f(x) = 5$.

Resolução:

a) $f_1(x) = f_2(x)$

$$\frac{1}{2}.|x|+3=\frac{3}{2}.|x+1|$$

$$|x|+6=3.|x+1|$$

Para x < –1, temos:

$-x + 6 = 3 . (-x - 1)$

$$x=-\frac{9}{2}$$

Para -1 ≤ x < 0, temos:

$-x + 6 = 3 . (x + 1)$

$x=\frac{3}{4}$ (não convém, pois –1 ≤ x < 0)

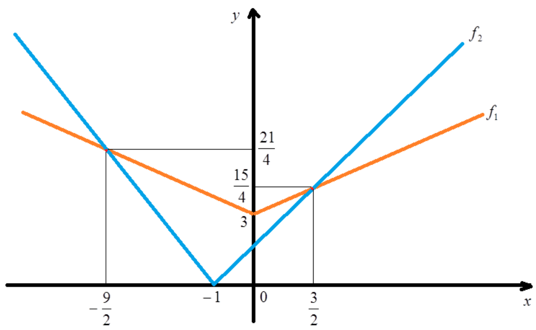
Para x ≥ 0, temos:

$x + 6 = 3 . (x + 1)$

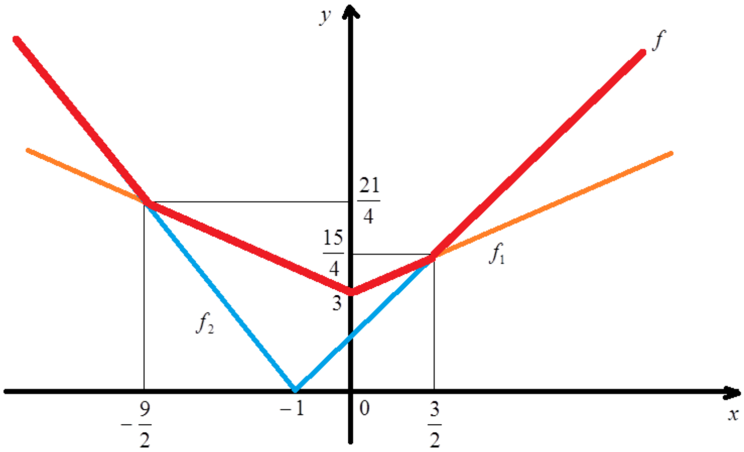
$$x=\frac{3}{2}$$

Logo: $S=\left\{-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right\}$

b) Observe os gráficos das funções f_1 e f_2:



Se f(x) assume o maior valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, então o gráfico de f é o seguinte:



Desta forma, o valor mínimo de f é igual a 3.

c) Pelo gráfico, observa-se que existem dois valores de x para os quais f(x) = 5.

Como $f_2(x) > f_1(x)$ para x > 3/2, então para f(x) = 5, tem-se:

$f_2(x) = 5$

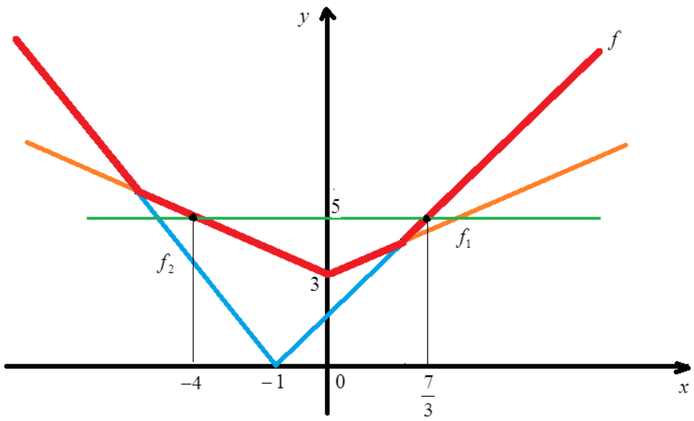
$$\frac{3}{2}.(x+1)=5 \rightarrow x=\frac{7}{3}$$

Para -9/2 < x < 0, temos $f_1(x) > f_2(x)$. Logo:

$f_1(x) = 5$

$$\frac{1}{2}.(-x)+3=5 \rightarrow x=-4$$

Portanto, as soluções de f(x) = 5 são $x=\frac{7}{3}$ ou $x=-4$.



22) Considere o polinômio *p* dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$ em que β é um número real.

a) Determine todos os valores de β sabendo-se que *p* tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

b) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio *p*.

Resolução:

a) Sejam as raízes de p: r; x + yi; x – yi, em que $x^2 + y^2 = 1$.

Pelas relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} r + (x+yi) + (x-yi) = -\dfrac{\beta}{18} \\ r\,.\,(x+yi) + r\,.\,(x-yi) + (x+yi).\ (x-yi) = -\dfrac{7}{18} \\ r\,.\,(x+yi).(x-yi) = \dfrac{\beta}{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r + 2x = -\dfrac{\beta}{18} \\ 2rx + x^2 + y^2 = -\dfrac{7}{18} \\ r\,.\left(x^2+y^2\right) = \dfrac{\beta}{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r + 2x = -\dfrac{\beta}{18} \\ 2rx + 1 = -\dfrac{7}{18} \\ r\,.1 = \dfrac{\beta}{18} \end{cases}$$

Resolvendo, temos:

$$\begin{cases} \beta = \pm 15 \\ x = \mp \dfrac{5}{6} \\ r = \pm \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

b) Para β = 15, temos $x = -\frac{5}{6}$ e $x^2 + y^2 = 1$, ou seja, $y = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$

Neste caso, os zeros de p são $\frac{5}{6}; \frac{-5+\sqrt{11}i}{6}\ e\ \frac{-5-\sqrt{11}i}{6}$.

Para β = -15, temos $x = \frac{5}{6}$ e $x^2 + y^2 = 1$, ou seja, $y = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Neste caso, os zeros de p são $-\frac{5}{6}; \frac{5+\sqrt{11}i}{6}\ e\ \frac{5-\sqrt{11}i}{6}$.

23) Sabe-se que 1, B, C, D e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I) B, C, D, E são dois a dois distintos;

II) os números 1, B, C, e os números 1, C, E, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

III) os números B, C, D, E, estão nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E.

Resolução:

Se (B, C, D, E) estão em P.G., então $C = Bq$, $D = Bq^2$ e $E = Bq^3$, em que q é a razão da P.G.

Se (1, B, C) estão em P.A., então:

$2B - 1 = C$ (I)

$2B - 1 = Bq$ (II)

Se (1, C, E) estão em P.A., então:

$2C - 1 = E$ (III)

$2Bq - 1 = Bq^3$ (IV)

Fazendo (IV) – (II), temos:

$2B \cdot (q - 1) = B \cdot q \cdot (q^2 - 1)$

$B \cdot (q - 1) \cdot [q \cdot (q + 1) - 2] = 0$

Sabe-se que $B \neq 0$ e $q \neq 1$, logo:

$q \cdot (q + 1) - 2 = 0$

$q^2 + q - 2 = 0$

$q = -2$ ou $q = 1$ (não convém, pois os valores são distintos dois a dois)

Substituindo q = -2 em (II), temos $B = \frac{1}{4}$.

Substituindo $B = \frac{1}{4}$ em (I), temos $C = -\frac{1}{2}$.

Substituindo $C = -\frac{1}{2}$ em (III), temos E = -2.

Como $D = Bq^2$, temos D = 1.

24) Seja M ⊂ IR dado por M = {$|z^2 + az - 1|$: z ∈ C e $|z| = 1$}, com a ∈ IR. Determine o maior elemento de M em função de a.

Resolução:

Observando que para qualquer número complexo w, tem-se $|w| = \sqrt{w\,.\,\overline{w}}$, temos:

$$|z^2 + az - 1| = \sqrt{(z^2 + az - 1).\overline{(z^2 + az - 1)}}$$

$$|z^2 + az - 1| = \sqrt{(z^2 + az - 1).(\overline{z}^2 + a\overline{z} - 1)}$$

$$|z^2 + az - 1| = \sqrt{z^2.\overline{z}^2 + a\,.\,z^2\,.\,\overline{z} - z^2 + az\,.\,\overline{z}^2 + a^2.\,z\,.\,\overline{z} - az - \overline{z}^2 - a\overline{z} + 1}$$

$$|z^2 + az - 1| = \sqrt{(z.\overline{z})^2 + a\,.\,z\,.\,(z\,.\,\overline{z}) - z^2 + a\,.\,(z\,.\,\overline{z}).\,\overline{z} + a^2.(z\,.\,\overline{z}) - az - \overline{z}^2 - a\overline{z} + 1}$$

Como $|z| = \sqrt{z\,.\,\overline{z}} = 1$, temos:

$$|z^2 + az - 1| = \sqrt{1^2 + a\,.\,z\,.\,(1) - z^2 + a\,.\,(1).\,\overline{z} + a^2.(1) - az - \overline{z}^2 - a\overline{z} + 1}$$

$$|z^2 + az - 1| = \sqrt{2 + a^2 - z^2 - \overline{z}^2}$$

$$|z^2 + az - 1| = \sqrt{2 + a^2 - 2.\mathrm{Re}(z^2)}$$

Como Re(z) = cosθ, em que θ é o argumento de z, temos:

$$|z^2 + az - 1| = \sqrt{2 + a^2 - 2.\cos(2\theta)}$$

Para que $|z^2 + az - 1|$ seja máximo é necessário e suficiente que cos(2θ) seja mínimo, isto é, cos(2θ) = -1. Desta forma, o valor máximo da expressão (maior elemento de M), é dado por

$$|z^2 + az - 1| = \sqrt{2 + a^2 - 2.(-1)}$$

$$|z^2 + az - 1| = \sqrt{a^2 + 4}$$

25) Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.

b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm –1 como uma de suas raízes.

Resolução:

a) Um polinômio de grau 4 possui 5 coeficientes. A quantidade de elementos de **S** é igual ao número de maneiras de escolher dois coeficientes iguais a 1 dentre os cinco coeficientes que possui o polinômio, ou seja, $C_5^2 = \frac{5.4}{3.2} = 10$.

b) Seja P(x) um polinômio de grau 4 que possui uma raiz igual a -1. Assim, podemos escrever:

$P(x) = (x + 1) . (ax^3 + bx^2 + cx + d)$

$P(x) = ax^4 + (a + b)x^3 + (b + c)x^2 + (c + d)x + d$

Se a = d = 1, então:

$P(x) = 1x^4 + (1 + b)x^3 + (b + c)x^2 + (c + 1)x + 1$

Para que os demais coeficientes sejam iguais a 2, necessariamente teríamos b = c = 1:

$P(x) = 1x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Por outro lado, se a = 1 e d = 2, então:

$P(x) = 1x^4 + (1 + b)x^3 + (b + c)x^2 + (c + 2)x + 2$

Neste caso, teríamos, necessariamente, b = 1 e c = 0:

$P(x) = 1x^4 + 2x^3 + 1x^2 + 2x + 2$

Se a = 2 e d = 1, então:

$P(x) = 2x^4 + (2 + b)x^3 + (b + c)x^2 + (c + 1)x + 1$

Neste caso, teríamos, necessariamente, b = 0 e c = 1:

$P(x) = 2x^4 + 2x^3 + 1x^2 + 2x + 1$

Se a = d = 2, então:

$P(x) = 2x^4 + (2 + b)x^3 + (b + c)x^2 + (c + 2)x + 2$

Nesta situação, não existem valores de b e c para os quais teríamos dois coeficientes de P iguais a 1 e três coeficientes de P iguais a 2.

Logo, os três únicos elementos de S que têm –1 como uma de suas raízes são:

$P_1(x) = 1x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$P_2(x) = 1x^4 + 2x^3 + 1x^2 + 2x + 2$

$P_3(x) = 2x^4 + 2x^3 + 1x^2 + 2x + 1$

26) Três pessoas, aqui designadas por A, B e C, realizam o seguinte experimento: A recebe um cartão em branco e nele assinala sinal + ou o sinal –, passando em seguida a B, que mantém ou troca o sinal marcado por A e repassa o cartão a C. Este, por sua vez, também opta por manter ou trocar o sinal do cartão. Sendo 1/3 a probabilidade de A escrever o sinal + e de 2/3 as respectivas probabilidades de B e C trocarem o sinal recebido, determine a probabilidade de A haver escrito o sinal + sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento.

Resolução:

$$p(A_+ / C_+) = \frac{p(A_+ / C_+)}{p(C_+)}$$

$$p(A_+ / C_+) = \frac{p(A_+ \cap B_+ \cap C_+) + p(A_+ \cap B_- \cap C_+)}{p(A_+ \cap B_+ \cap C_+) + p(A_+ \cap B_- \cap C_+) + p(A_- \cap B_+ \cap C_+) + p(A_- \cap B_- \cap C_+)}$$

$$p(A_+ / C_+) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}$$

$$p(A_+ / C_+) = \frac{5}{13}$$

27) Seja n um inteiro positivo tal que $sen\ \frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ **.**

a) Determine n.

b) Determine $sen\ \frac{\pi}{24}$.

Resolução:

a) Da relação trigonométrica cos(2x) = 1 – 2 . sen^2(x), podemos substituir $x = \frac{\pi}{2n}$ e obter:

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1 - 2\,.\,sen^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Substituindo $sen\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ e desenvolvendo, temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1 - 2\,.\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}\right)^2$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{6}$$

$$n = 6$$

b) Da resolução anterior, conclui-se que $sen\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

$$sen^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$$

$$\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}\right)^2 + \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$$

Retornando à equação $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=1-2\,.\,sen^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ e substituindo n = 12, temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=1-2\,.\,sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=1-2\,.\,sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$2\,.\,sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right)=1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \quad , \quad sen\left(\frac{\pi}{24}\right)>0$$

28) Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S\ \begin{cases} 2x + by = \alpha \\ cx + \ \ y = \beta \end{cases} \qquad\qquad T\ \begin{cases} cx + 3y = \alpha \\ 4x + dy = \beta \end{cases}$$

Resolução:

Considerando que as equações de cada sistema representam retas em IR^2, e para que cada sistema seja compatível e indeterminado, as equações devem representar retas paralelas iguais (coincidentes), deve-se, necessariamente ter:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{c} = \dfrac{b}{1} = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ \dfrac{c}{4} = \dfrac{3}{d} = \dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

Observe que $\dfrac{2}{c} = \dfrac{c}{4} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, ou seja, $c^2 = 8$ e, portanto, $c = \pm 2\sqrt{2}$.

Além disso:

$$\frac{2}{c} = \frac{b}{1} \rightarrow \frac{2}{\pm 2\sqrt{2}} = b \rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{c}{4} = \frac{3}{d} \rightarrow d = \frac{12}{\pm 2\sqrt{2}} \rightarrow d = \pm 3\sqrt{2}$$

Portanto:

$$(b\,;c\,;d) \in \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,; 2\sqrt{2}\,; 3\sqrt{2} \right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,; -2\sqrt{2}\,; -3\sqrt{2} \right) \right\}$$

A relação entre α e β pode ser obtida a partir de:

$$\frac{c}{4} = \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{4} \rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

29) Sabe-se que a equação $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s, formando um ângulo θ. Determine a tangente de θ.

Resolução:

$3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$

$3x^2 - xy + 3x + 6xy - 2y^2 + 6y - 6x + 2y - 6 = 0$

$-x \cdot (-3x + y - 3) - 2y \cdot (-3x + y - 3) + 2 \cdot (-3x + y - 3) = 0$

$(-3x + y - 3) \cdot (-x - 2y + 2) = 0$

$-3x + y - 3 = 0$ ou $-x - 2y + 2 = 0$

$$y = 3x + 3 \;\; ou \;\; y = -\frac{1}{2}x + 1$$

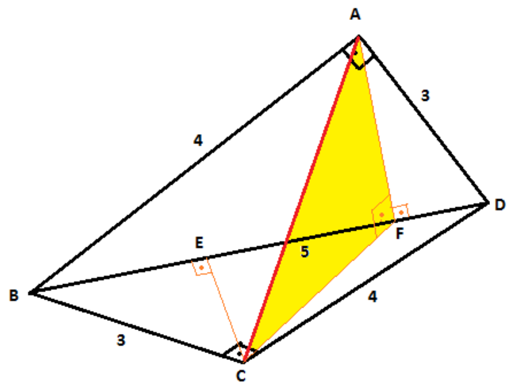
Os coeficientes angulares das retas são iguais a $3 \; e \; -\frac{1}{2}$, respectivamente, logo:

$$tg\,\theta = \left| \frac{3 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \right| = \left| \frac{3 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{2}} \right| = \left| \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} \right| = |-7| = 7$$

30) Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

Resolução:

Se a folha retangular possui lados de medidas 3 cm e 4 cm, então pelo teorema de Pitágoras, a diagonal mede 5 cm (BD = 5). Além disso, se duas faces do tetraedro são congruentes e têm medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm, então cinco arestas têm medidas previamente conhecidas e resta apenas se determinar AC:



Utilizando-se uma relação métrica do triângulo retângulo nas faces ABD e BCD, temos:

(AB) . (AD) = (BD) . (AF)

3 . 4 = 5 . (AF)

$$AF = \frac{12}{5}$$

Assim, AF = CE = 12/5.

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo AFD, temos:

$$(AC)^2 = (AF)^2 + (CF)^2$$

Observe que **ACE** é um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede **AC**. Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(AD)^2 = (AF)^2 + (FD)^2$$

$$3^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + (FD)^2$$

$$(FD)^2 = 9 - \frac{144}{25}$$

$$FD = \frac{9}{5}$$

Observe ainda que BE = FD e BE + EF + FD = BD, logo:

$$\frac{9}{5} + EF + \frac{9}{5} = 5$$

$$EF = \frac{7}{5}$$

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo EFC, temos:

$$(CF)^2 = (EF)^2 + (CE)^2$$

$$(CF)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

$$CF = \frac{\sqrt{193}}{5}$$

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo ACF, temos:

$$(AC)^2 = (AF)^2 + (CF)^2$$

$$(AC)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{193}}{5}\right)^2$$

$$CF = \frac{\sqrt{337}}{5} \textbf{ cm}$$

Logo, duas arestas do tetraedro medem 3 cm, duas medem 4 cm, uma mede 5 cm e uma mede $\frac{\sqrt{337}}{5}$ cm.